

БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ  
ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

---

Виктория Герасимова Бенчева-Петрова

ДИФЕРЕНЦИАЛНА ГЕОМЕТРИЯ НА ВРЕМЕПОДОБНИ  
ПОВЪРХНИНИ В ЧЕТИРИМЕРНО ПРОСТРАНСТВО НА  
МИНКОВСКИ

ДИСЕРТАЦИЯ

за присъждане на образователната и научна степен "доктор"

Област на висше образование 4. Природни науки, математика и  
информатика

Професионално направление 4.5. Математика

Докторска програма "Геометрия и Топология"

София, 2024 г.

# Въведение

В локалната теория на повърхнините и хиперповърхнините в стандартни моделни пространства, като Евклидовото пространство  $\mathbb{E}^m$ , пространството на Минковски  $\mathbb{E}_1^m$  или псевдо-Евклидовото пространство  $\mathbb{E}_s^m$  с индекс  $s > 1$ , един от основните проблеми е да се определи повърхнината (хиперповърхнината) чрез система от няколко функции, удовлетворяващи няколко диференциални уравнения. Това е така наречената фундаментална теорема от типа на Боне (Bonnet), даваща естествените условия, при които повърхнината е определена с точност до движение. Разработването на теорията на повърхнините в 4-мерното Евклидово пространство  $\mathbb{R}^4$ , както и в 4-мерното пространство на Минковски  $\mathbb{R}_1^4$ , е база за разработването на общата теория на 2-мерни повърхнини в  $\mathbb{E}^m$  и в  $\mathbb{E}_1^m$ .

В Евклидовото пространство  $\mathbb{R}^4$  общата фундаментална теорема гласи, че всяка повърхнина без минимални точки е определена с точност до движение в  $\mathbb{R}^4$  чрез осем функции, удовлетворяващи система от няколко диференциални уравнения [33]. За класа на минималните повърхнини в  $\mathbb{R}^4$ , броят на инвариантните функции и броят на диференциалните уравнения, определящи повърхнината с точност до движение, са редуцирани до две [65]. Повърхнините с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина са определени с точност до движение от три инвариантни функции, удовлетворяващи система от три частни диференциални уравнения [41].

В последните години интензивно се изучават повърхнини в псевдо-Евклидови пространства, тъй като те намират интерпретация от физична гледна точка. В псевдо-Евклидово пространство съществуват два типа повърхнини в зависимост от това каква е индуцираната им метрика - Риманова или Лоренцова. Повърхнините се наричат съответно пространственоподобни или времеподобни.

Резултати, аналогични на споменатите по-горе резултати в Евклидовото пространство  $\mathbb{R}^4$ , има и за пространственоподобни повърхнини в 4-мерно пространство на Минковски  $\mathbb{R}_1^4$ . Локалната теория на пространственоподобните повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$ , чийто вектор на средната кривина във всяка точка е ненулев пространственоподобен (или времеподобен вектор), е разгледана в [35]. Този клас повърхнини е определен с точност до движение в  $\mathbb{R}_1^4$  от осем инвариантни функции, удовлетворяващи система частни диференциални уравнения. Пространственоподобните повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$ ,

чийто вектор на средната кривина във всяка точка е светлинноподобен, са наречени "marginally trapped"<sup>1</sup> повърхнини. Тези повърхнини са дефинирани от Роджър Пенроуз (Roger Penrose) с цел да се изследват глобалните свойства на пространството-време [60] и играят важна роля в теорията на космическите черни дупки. В последно време "marginally trapped" повърхнините, удовлетворяващи някакви допълнителни условия, се изследват интензивно от математическа гледна точка, виж. например [9], [10], [11], [24], [25], [26], [27]. Инвариантната теория на marginally trapped повърхнините в  $\mathbb{R}_1^4$  е разглеждана в [37], където е доказано, че тези повърхнини са определени с точност до движение чрез седем инвариантни функции, удовлетворяващи система частни диференциални уравнения. В 4-мерно Евклидово пространство с неутрална метрика аналог на marginally trapped повърхнините са квази-минималните повърхнини. Квази-минималните повърхнини с паралелно векторно поле на средната кривина в  $\mathbb{R}_2^4$  са разглеждани в [22]. В [42] е дадена класификация на квази-минимални ротационни повърхнини в  $\mathbb{R}_2^4$ .

Изследването на минималните повърхнини е една от основните задачи в класическата диференциална геометрия, която води началото си 18-ти век, когато Лагранж (Lagrange) разглежда вариационна задача за намиране на повърхнина с минимално лице, зададена от затворен контур, и намира уравнението на минималните повърхнини, известно днес като уравнение на Лагранж [47]. Геометричната интерпретация на минималните повърхнини като повърхнини с нулева средна кривина е дадена от Meusnier [55]. Изучаването на минимални повърхнини в 4-мерно Евклидово пространство води началото си от Eisenhart [30]. Подробни резултати за минимални повърхнини са дадени в книгата на Nitsche [58]. Интензивното изучаването на минимални подмногообразия, вложени в различни пространства, е свързано с приложенията, които те имат в математическата физика. Класификация на минимални Лоренцови повърхнини в псевдо-Евклидово пространство  $\mathbb{E}_s^m$  с индекс  $s > 1$  е дадена в [20]. В [62] са изследвани минимални повърхнини в 4-мерно пространство с индекс 2.

При изследването на повърхнините с нулев вектор на средната кривина в псевдо-Евклидови пространства съществен проблем е въвеждането на специални параметри, които позволяват да се минимизира броят на функциите и броят на частните диференциални уравнения, които определят повърхнината с точност до движение. Максималните пространственоподобни повърхнини и минималните времеподобни повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$  са изследвани съответно в [2] и [36]. Доказано е, че тези повърхнини локално допускат специални изотермични параметри (наречени *канонични*), спрямо които двете основни инварианти Гаусовата кривина и нормалната кривина удовлетворяват система от две ЧДУ, наречени *естествени уравнения* на повърхнината. И

<sup>1</sup>Поради липса на добър превод на български език на това понятие, ще го използваме на английски език.

така, за повърхнините с нулев вектор на средната кривина, броят на функциите и броят на уравненията, които определят повърхнината с точност до движение, е редуциран до две. Освен това, геометрията на този клас повърхнини се определя от решенията на тези системи ЧДУ.

Напоследък се появиха редица изследвания, свързани с класификация на Лоренцови (времеподобни) повърхнини в псевдо-Евклидови пространства, удовлетворяващи допълнителни условия за векторното поле на средната кривина или за втория фундаментален тензор. Ще споменем някои от тях.

Времеподобни повърхнини с постоянна средна кривина в 3-мерно пространство на Минковски са изучавани в [53]. Класификация на пространственоподобни хеликоидални повърхнини с постоянна средна кривина в  $\mathbb{R}_1^3$  е дадена в [63]. Пространственоподобни повърхнини с постоянна средна кривина са изучавани също в [4] и [6].

Една повърхнина се нарича паралелна, ако втората ѝ основна форма е паралелна по отношение на свързаността на Van der Waerden-Bortolotti. Паралелните повърхнини представляват интерес не само в диференциалната геометрия, но също така и във физиката, тъй като техните външни инварианти не се променят от точка в точка. Паралелните Лоренцови повърхнини в 4-мерно псевдо-Евклидово пространство са описани от В.-У. Chen и J. Van der Veken в [23]. Експлицитен вид на паралелните повърхнини в псевдо-Евклидовото пространство с неутрална метрика  $\mathbb{R}_2^4$ , в псевдохиперболичното пространство  $\mathbb{H}_2^4(-1)$  и в неутралната псевдо-сфера  $\mathbb{S}_2^4(1)$  е получен съответно в [21], [14] и [15]. Класификация на паралелните Лоренцови повърхнини в псевдо-Евклидово пространство  $\mathbb{E}_s^m$  с произволна размерност  $m$  и произволен индекс  $s$  е дадена в [16].

Повърхнините с паралелно векторно поле на средната кривина са друг основен клас повърхнини в Римановата и псевдо-Римановата геометрия. Те играят важна роля както в диференциалната геометрия, така и в теорията на хармоничните изображения и физиката. Първите класификационни резултати за повърхнините с паралелно векторно поле на средната кривина в Риманови пространства с постоянна кривина са дадени от Chen [7] и Yau [67]. В последните години бяха класифицирани пространственоподобни повърхнини с паралелно векторно поле на средната кривина в произволни пространствени форми [12], [13]. Пълна класификация на Лоренцовите повърхнини с паралелно векторно поле на средната кривина в произволно-мерно псевдо-Евклидово пространство  $\mathbb{E}_s^m$  е направена в [17] и [31]. Обзор на класически и нови резултати, свързани с подмногообразия с паралелно векторно поле на средната кривина както в Риманови, така и в псевдо-Риманови многообразия, е представен от Chen в [18].

Класът на повърхнините с паралелно нормирано векторно поле на средната

кривина се явява разширение на класа на повърхнините с паралелно векторно поле на средната кривина. Една повърхнина в Риманово или псевдо-Риманово многообразие има паралелно нормирано векторно поле на средната кривина, ако векторното ѝ поле на средната кривина  $H$  е ненулево и единичното векторно поле по направление на  $H$  е паралелно [8]. Известно е, че всяка повърхнина в 3-мерното Евклидово пространство има паралелно нормирано векторно поле на средната кривина, но в 4-мерното Евклидово пространство има редица примери на повърхнини, които са с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина, но не и с паралелно векторно поле на средната кривина, което показва, че условието за наличие на паралелно нормирано векторно поле на средната кривина е по-слабо от това за наличие на паралелно векторно поле на средната кривина. В [8] е доказано, че всяка аналитична повърхнина с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина в Евклидовото пространство  $\mathbb{E}^m$  лежи или в 4-мерно Евклидово пространство  $\mathbb{E}^4$ , или върху хиперсфера в  $\mathbb{E}^m$  като минимална повърхнина. Пространственоподобни подмногообразия с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина в пространство на de Sitter са изследвани в [64]. За времеподобни повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина в  $\mathbb{R}_1^4$  не са ни известни резултати.

Целта на настоящата дисертация е изучаване на времеподобни повърхнини в 4-мерното пространство на Минковски  $\mathbb{R}_1^4$  и разработване на локалната им теория по аналогия с локалната теория на повърхнините в 4-мерното Евклидово пространство  $\mathbb{R}^4$  и на теорията на пространственоподобните повърхнини в 4-мерното пространство на Минковски  $\mathbb{R}_1^4$ . Подходът ни към изучаване на времеподобните повърхнини се базира на въвеждане на геометрично определен придружаващ репер във всяка точка на повърхнината, спрямо който получаваме съвкупност от геометрични функции и система от частни диференциални уравнения, които определят повърхнината с точност до движение в  $\mathbb{R}_1^4$ .

Естествено е да си поставим въпроса дали могат да се въведат специални параметри върху други класове времеподобни повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$  освен минималните, които да позволят минимизиране на броя на функциите и броя на уравненията, задаващи повърхнините с точност до движение. Успяхме да решим този проблем за класа на времеподобните повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина. Подходът ни към изучаване на тези повърхнини се базира на въвеждане на специални изотропни параметри, които наричаме канонични. Използването на канонични параметри позволява да характеризираме времеподобните повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина чрез три функции, удовлетворяващи система от три частни диференциални уравнения, които определят повърхнината с точност до движение.

В първа глава разработваме локалната теория на времеподобни повърхнини в четиримерното пространство на Минковски  $\mathbb{R}_1^4$  по аналогия с теорията на повърхнините в  $\mathbb{R}^4$  и на пространственоподобните повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$ . За различните класове повърхнини използваме параметризация спрямо различни, специално избрани параметри и доказваме фундаментални теореми – теореми за съществуване и единственост. За разлика от повърхнините в  $\mathbb{R}^4$  и пространственоподобните повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$ , при които винаги съществува параметризация спрямо главни линии, за времеподобните повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$  възниква и случай, в който няма главни линии и за този клас повърхнини прилагаме нов подход, базиран на изотропните направления на повърхнината.

В §1.2 въвеждаме линейно изображение  $\gamma$  от тип изображение на Вайнгартен и разработваме локална теория за времеподобни повърхнини в четиримерното пространство на Минковски  $\mathbb{R}_1^4$  по аналогия с теорията на повърхнините в  $\mathbb{R}^4$  и на пространственоподобните повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$ . Въвеждаме инвариантите  $k$  и  $\varkappa$ , които са породени от изображението  $\gamma$  по следния начин:  $k = \det \gamma$ ,  $\varkappa = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \gamma$  и намираме условие върху тези инварианти, при което изображението  $\gamma$  може да се диагонализира. Това условие е  $\varkappa^2 - k > 0$ . За разлика от пространственоподобните повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$ , при които изображението на Вайнгартен винаги е диагонализируемо и съществуват главни линии във всяка точка на повърхнината, в случая на времеподобна повърхнина в  $\mathbb{R}_1^4$  изображението  $\gamma$  не винаги може да се диагонализира. Затова в случая когато  $\varkappa^2 - k > 0$ , разработваме локалната теория аналогично на теорията на пространственоподобните повърхнини като използваме главни линии, а в случая когато  $\varkappa^2 - k < 0$  прилагаме друг подход, базиран на изотропните направления на повърхнината.

В §1.3 разглеждаме времеподобни повърхнини, за които  $\varkappa^2 - k = 0$  във всяка точка. Тези повърхнини се състоят само от омбилични точки<sup>2</sup>. В този параграф доказваме, че една времеподобна повърхнина без инфлексни точки е минимална тогава и само тогава, когато се състои от омбилични точки. Минималните времеподобни повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$  са изучавани в [36], където е доказано, че те се определят еднозначно (с точност до движение) чрез две инвариантни функции, удовлетворяващи система от две частни диференциални уравнения. Поради това, в настоящия дисертационен труд не разглеждаме този клас времеподобни повърхнини.

В §1.4 изучаваме времеподобни повърхнини, за които  $\varkappa^2 - k \neq 0$ , т.е. повърхнини без омбилични точки. В този случай имаме 2 подслучая: когато  $\varkappa^2 - k > 0$  в някаква подобласт и когато  $\varkappa^2 - k < 0$  в някаква подобласт. В следващите два параграфа разглеждаме отделно двата подслучая.

<sup>2</sup>Използваме терминологията от класическата диференциална геометрия на повърхнини в  $\mathbb{R}^3$ .

В §1.4.1 изучаваме времеподобните повърхнини, за които  $\kappa^2 - k > 0$ . В този случай повърхнината може да се параметризира спрямо главните линии. Въвеждаме геометричен репер на повърхнината  $\{X, Y, N_1, N_2\}$ , определен от главните направления и векторното поле на средната кривина и разработваме локалната теория на времеподобните повърхнини, за които  $\kappa^2 - k > 0$ , по аналогия с теорията на пространственоподобните повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$ . Извеждаме деривационни формули за повърхнината от тип формули на Френе и получаваме 8 функции  $\gamma_1, \gamma_2, \nu_1, \nu_2, \lambda, \mu, \beta_1, \beta_2$ , определени от геометричния репер. Доказваме фундаментална теорема (теорема за съществуване и единственост) за класа на времеподобните повърхнини, параметризирани спрямо главните линии, която гласи, че тези осем функции определят еднозначно повърхнината с точност до движение в  $\mathbb{R}_1^4$  (Теорема 1.4.6).

В §1.4.2 разглеждаме подслучая  $\kappa^2 - k < 0$ . В този случай не съществуват главни линии и подходът от предишния параграф не може да се приложи. Затова използваме, че във всяка точка от времеподобна повърхнина съществуват две изотропни линии и изучаваме тези повърхнини като използваме параметризация спрямо изотропни параметри. Въвеждаме геометричен репер  $\{x, y, n_1, n_2\}$  на повърхнината, определен от изотропните направления, който наричаме псевдо-ортонормиран геометричен репер. Разработваме локална теория за времеподобните повърхнини, параметризирани спрямо изотропни линии, като извеждаме деривационните формули и получаваме система от функции  $\gamma_1, \gamma_2, \nu, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \beta_1, \beta_2$ , определени от псевдо-ортонормирания геометричен репер. Даваме характеристика на основните класове времеподобни повърхнини чрез условия върху тези функции. Например, повърхнините с постоянна ненулева средна кривина се характеризират с условието  $\nu = \text{const} = c, c \neq 0$  (Твърдение 1.4.8). Плоските повърхнини се определят с равенството  $\nu^2 = \lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2$  (Твърдение 1.4.9). Повърхнините с постоянна ненулева Гаусова кривина се характеризират с  $\nu^2 - (\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2) = \text{const} = c, c \neq 0$  (Твърдение 1.4.10). Условията  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  и  $\nu = \text{const}$  определят класа на повърхнините с паралелно векторно поле на средната кривина (Твърдение 1.4.11), а повърхнините с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина се характеризират с условията  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  и  $\nu \neq \text{const}$  (Твърдение 1.4.12).

В следващия параграф доказваме фундаментални теореми за съществуване и единственост на времеподобни повърхнини, параметризирани спрямо изотропни линии.

В §1.4.3 изучаваме повърхнини, за които  $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$ . Наричаме ги времеподобни повърхнини от общ тип. Като използваме, че свързаността  $\tilde{\nabla}$  на Леви-Чевита е плоска и деривационните формули, получени в §1.4.2, получаваме условия за интегрируемост за този клас повърхнини. Налице са три типа такива повърхнини.

Първият тип се характеризира с  $\mu_1 \neq 0, \mu_2 \neq 0$  и се определя от шест функции

$f > 0$ ,  $\nu$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ , удовлетворяващи система от четири частни диференциални уравнения. Доказваме фундаментална теорема за съществуване и единственост (Теорема 1.4.15) на времеподобни повърхнини от първи тип, която гласи, че всяка такава повърхнина се определя еднозначно (с точност до движение в  $\mathbb{R}_1^4$ ) от тези 6 функции.

Вторият тип се характеризира с  $\mu_1 \neq 0$ ,  $\mu_2 = 0$ ,  $\lambda_2 \neq 0$  и се определя от 5 функции  $f > 0$ ,  $\nu$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\mu_1$ , удовлетворяващи система от 4 частни диференциални уравнения. Фундаменталната теорема за времеподобни повърхнини от втори тип е Теорема 1.4.16.

Третият тип се определя с  $\mu_1 \neq 0$ ,  $\mu_2 = 0$ ,  $\lambda_2 = 0$ . В този случай получаваме, че повърхнината е определена еднозначно от 3 функции  $f > 0$ ,  $\lambda_1$ ,  $\mu_1$ , удовлетворяващи система от 3 частни диференциални уравнения. Теорема 1.4.17 е фундаменталната теорема за съществуване и единственост на времеподобни повърхнини от трети тип.

В §1.5 разглеждаме времеподобни повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина, т.е. повърхнини, за които е изпълнено  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  и  $\nu = \text{const} \neq 0$ . За този клас повърхнини извеждаме деривационните формули от тип формули на Френе и получаваме условията за интегрируемост. Времеподобните повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина се делят на два основни подкласа: повърхнини, за които  $K - H^2 \neq 0$  в подобласт, и повърхнини, за които  $K - H^2 = 0$ , където  $K$  е Гаусовата кривина, а  $H$  е векторното поле на средната кривина. И за двата класа повърхнини можем да въведем специални изотропни параметри, чрез които да докажем теореми за съществуване и единственост.

В §1.5.1 изследваме случая, в който Гаусовата кривина  $K$  и векторното поле на средната кривина  $H$  удовлетворяват условието  $K - H^2 \neq 0$  в някаква подобласт. В този случай е в сила  $\mu_1\mu_2 \neq 0$ . За този клас повърхнини въвеждаме специални изотропни параметри, които наричаме канонични, и доказваме, че всяка повърхнина от този клас локално може да се параметризира спрямо канонични параметри (Твърдение 1.5.3). След извеждане на деривационните формули спрямо канонични параметри и използване на получените от тях условия за интегрируемост, доказваме, че всяка времеподобна повърхнина с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина, за която  $K - H^2 \neq 0$ , се определя от 3 функции  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $\nu$ , удовлетворяващи система от 3 частни диференциални уравнения.

В §1.5.2 изследваме втория случай, в който  $K - H^2 = 0$  в някаква подобласт, т.е.  $\mu_1\mu_2 = 0$ . В този случай отново въвеждаме канонични параметри за повърхнината и след извеждане на деривационните формули и условията за интегрируемост, получаваме, че повърхнината е определена от 3 функции, удовлетворяващи 2 частни диференциални уравнения.

В §1.5.3 доказваме фундаменталните теореми за съществуване и единственост



на времеподобни повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина, формулирани чрез канонични параметри. Теорема 1.5.6 е фундаменталната теорема за случая, при който  $K - H^2 \neq 0$ , а Теорема 1.5.7 – за случая  $K - H^2 = 0$ . С тези теореми показваме, че за класа на времеподобните повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина в  $\mathbb{R}_1^4$  можем да редуцираме броя на функциите и броя на частните диференциални уравнения, които определят повърхнината с точност до движение в  $\mathbb{R}_1^4$ .

Във втора глава прилагаме разработената локална теория за времеподобни повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$  като конструираме два големи класа повърхнини, единият от които допуска параметризация спрямо главни линии, а другият не допуска такава параметризация и при него използваме изотропни параметри. Първият клас са обобщени ротационни повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$ . При тях изображението на Вайнгартен е диагонализируемо и прилагаме разработената в §1.4.1 теория. Вторият клас са специални повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$ , които представляват 1-параметрични системи от меридиани на ротационна хиперповърхнина. За този клас повърхнини изображението на Вайнгартен е недиагонализируемо и за тях прилагаме теорията, разработена в §1.4.2 и §1.4.3.

В §2.1 разглеждаме времеподобни обобщени ротационни повърхнини от два типа – с времеподобна и с пространственоподобна меридианна крива. За тези повърхнини изображението на Вайнгартен е диагонализируемо и ги изучаваме параметризиращи спрямо главните направления.

В §2.1.1 описваме класа на времеподобните обобщени ротационни повърхнини с времеподобна меридианна крива, които наричаме времеподобни обобщени ротационни повърхнини от първи тип. За този клас въвеждаме геометричен репер, извеждаме деривационните формули и пресмятаме Гаусовата кривина  $K$ , векторното поле на средната кривина  $H$  и кривината на нормалната свързаност  $\varkappa$ . Показваме, че  $\varkappa^2 - k > 0$  и намираме осемте функции  $\gamma_1, \gamma_2, \nu_1, \nu_2, \lambda, \mu, \beta_1, \beta_2$  от фундаменталната теорема.

В §2.1.2 разглеждаме класа на времеподобните обобщени ротационни повърхнини с пространственоподобна меридианна крива. Този клас повърхнини наричаме времеподобни обобщени ротационни повърхнини от втори тип. Аналогично на класа на времеподобните обобщени ротационни повърхнини от първи тип, тук също въвеждаме геометричен репер, извеждаме деривационните формули и намираме осемте функции от фундаменталната теорема. Доказваме, че времеподобните обобщени ротационни повърхнини от първи и втори тип без минимални точки са нетривиални Chen-повърхнини (Теорема 2.1.1).

В следващите параграфи описваме някои основни класове времеподобни обобщени ротационни повърхнини, зададени с условия върху Гаусовата кривина, нормал-

ната кривина или векторното поле на средната кривина.

В §2.1.3 изследваме класа на плоските ( $K = 0$ ) времеподобни обобщени ротационни повърхнини от първи и втори тип. Описваме ги аналитично чрез Теорема 2.1.2.

В §2.1.4 даваме аналитично представяне на времеподобните обобщени ротационни повърхнини от първи и втори тип с плоска нормална свързаност ( $\varkappa = 0$ ). Резултатът е даден в Теорема 2.1.3.

В §2.1.5 разглеждаме времеподобни обобщени ротационни повърхнини от първи и втори тип, състоящи се от параболични точки. За този клас повърхнини е в сила  $k = 0$ , където  $k$  е инвариантата от изображението на Вайнгартен. Описваме аналитично тези повърхнини като резултатите са представени в Теорема 2.1.4.

В §2.1.6 даваме експлицитен вид на минималните ( $H = 0$ ) времеподобни обобщени ротационни повърхнини от първи и втори тип като доказваме Теорема 2.1.5.

В §2.1.7 разглеждаме времеподобните обобщени ротационни повърхнини от първи и втори тип с постоянно векторно поле на средната кривина ( $\langle H, H \rangle = \text{const} \neq 0$ ) и даваме аналитичен вид на този клас повърхнини в Теорема 2.1.6.

В §2.1.8 описваме аналитично времеподобните обобщени ротационни повърхнини от първи и втори тип с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина като доказваме Теорема 2.1.7.

В §2.2 конструираме специален клас времеподобни повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$ , които представляват 1-параметрични системи от меридиани на ротационна хиперповърхнина в  $\mathbb{R}_1^4$ . Наричаме ги времеподобни меридианни повърхнини. Този клас повърхнини не допуска параметризация спрямо главни линии, затова го изучаваме спрямо изотропните направления. В следващите параграфи разглеждаме различни класове меридианни времеподобни повърхнини.

В §2.2.1 разглеждаме меридианни повърхнини, които са 1-патраметрични системи от меридиани на ротационна хиперповърхнина с времеподобна ос. Наричаме ги меридианни повърхнини от елиптичен тип. За този клас повърхнини пресмятаме инвариантите  $k$  и  $\varkappa$  и получаваме, че те удовлетворяват неравенството  $\varkappa^2 - k < 0$ , поради което не съществуват главни линии. Въвеждаме изотропни параметри и геометричен псевдо-ортономиран репер, определен от изотропните направления и вектора на средната кривина  $H$ . Пресмятаме деривационните формули спрямо изотропните параметри, от където намираме функциите  $\gamma_1, \gamma_2, \nu, \mu_1, \mu_2, \lambda_1, \lambda_2, \beta_1, \beta_2$ , изразени чрез функциите, задаващи меридианната крива, и сферичната кривина на сферичната крива, задаваща ротационната хиперповърхнина.

В §2.2.2 класифицираме меридианните времеподобни повърхнини от елиптичен тип, за които Гаусовата кривина е константа. Получаваме експлицитно представяне

на плоските меридианни повърхнини от елиптичен тип, което е дадено в Теорема 2.2.4, и на меридианните повърхнини с ненулева постоянна Гаусова кривина, които са зададени експлицитно в Теорема 2.2.5.

В §2.2.3 даваме класификация на меридианните времеподобни повърхнини от елиптичен тип с постоянна средна кривина, т.е.  $\langle H, H \rangle = \text{const} \neq 0$ . Резултатите са дадени в Теорема 2.2.6.

В §2.2.4 разглеждаме времеподобни меридианни повърхнини от елиптичен тип с постоянна инварианта  $k$ , които са описани в Теорема 2.2.7.

### Статии по дисертацията

Резултатите, представени в дисертацията, са публикувани в следните статии:

- Bencheva V., Milousheva, V., *Basic Classes of Timelike General Rotational Surfaces in the Four-dimensional Minkowski Space*, Filomat, Vol. **37**, no. 25 (2023), 8505–8519, ISSN: 0354-5180 (Print), ISSN: 2406-0933 (Online), **IF: 0.8, (Q2)**, <https://doi.org/10.2298/FIL2325505B>.
- Bencheva V., Milousheva, V., *Timelike Surfaces with Parallel Normalized Mean Curvature Vector Field*, Turkish Journal of Mathematics (2024), Vol. **48**: no. 2, Article 15, ISSN:1300-0098, **IF: 1.0 (Q2)**, <https://doi.org/10.55730/1300-0098.3509>.
- Bencheva V., Milousheva, V., *Fundamental Theorems for Timelike Surfaces in the Minkowski 4-Space*, C. R. Acad. Bulg. Sci., vol. **77**, no. 2 (2024), 167–178, ISSN: 1310–1331 (Print), 2367–5535 (Online), **IF: 0.3, (Q4)**, **SJR: 0.182 (Q3)**, <https://doi.org/10.7546/CRABS.2024.02.01>.

### Благодарности

Искам да изкажа най-искрените си благодарности на научния си ръководител **проф. Величка Милушева**, която бе неотлъчно до мен, подкрепяше ме и ми даваше множество ценни съвети и насоки при разработването и оформянето на дисертационния труд.

Искам да благодаря и на втория си научен ръководител **доц. д-р Милен Христов**, който ме насочи към диференциалната геометрия и ми даваше ценни напътствия и консултации.

И също така, искам да изкажа най-сърдечни благодарности към семейството ми, което вярва в мен и успехите ми, и ме подкрепя безусловно.

# Глава 1

## Фундаментални теореми за времениподобни повърхнини в четиримерно пространство на Минковски

### 1.1 Основни сведения и понятия

Нека  $\mathbb{R}_1^4$  е четиримерно пространство на Минковски с индуцирана метрика  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  със сигнатура (3,1). Ориентацията в  $\mathbb{R}_1^4$  се задава с фиксирана ортонормирана координатна система  $\mathcal{K} = Oe_1e_2e_3e_4$  такава, че  $\langle e_1, e_1 \rangle = \langle e_2, e_2 \rangle = \langle e_3, e_3 \rangle = 1, \langle e_4, e_4 \rangle = -1$ . Стандартната гладка метрика се задава в локални координати чрез

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2.$$

При индефинитна метрика вектор  $v$  от псевдо-Евклидовото пространство  $\mathbb{R}_1^4$  може да бъде

- (1) *пространственopodoben*, ако  $\langle v, v \rangle > 0$  или  $v = 0$ ;
- (2) *времениподобен*, ако  $\langle v, v \rangle < 0$ ;
- (3) *светлинноподобен* (наричан също *изотропен*), ако  $v \neq 0$  и  $\langle v, v \rangle = 0$ .

Тази терминология е взета от физиката и по-специално от Общата теория на относителността [59].

**Дефиниция 1.1.1.** Една двумерна повърхнина  $M^2$  в  $\mathbb{R}_1^4$  се нарича *пространственopodobна*, ако индуцираната метрика  $g$  върху  $M^2$  е Риманова.

Това означава, че във всяка точка  $p$  на пространственopodobна повърхнина  $M^2$

имаме следното разлагане на допирателно и нормално пространство:

$$\mathbb{R}_1^4 = T_p M^2 \oplus N_p M^2,$$

при което рестрикцията на метриката  $\langle, \rangle$  върху допирателното пространство  $T_p M^2$  е със сигнатура  $(2, 0)$  и рестрикцията на метриката върху нормалното пространство  $N_p M^2$  е със сигнатура  $(1, 1)$ .

**Дефиниция 1.1.2.** Една двумерна повърхнина  $M^2$  в  $\mathbb{R}_1^4$  се нарича *времеподобна*, ако индуцираната метрика  $g$  върху  $M^2$  е с индекс 1 (т.е. Лоренцова).

С други думи, във всяка точка  $p$  на времеподобна повърхнина  $M^2$  имаме следното разлагане на допирателно и нормално пространство:

$$\mathbb{R}_1^4 = T_p M^2 \oplus N_p M^2,$$

при което рестрикцията на метриката  $\langle, \rangle$  върху допирателното пространство  $T_p M^2$  е със сигнатура  $(1, 1)$  и рестрикцията на метриката върху нормалното пространство  $N_p M^2$  е със сигнатура  $(2, 0)$ .

Използваме стандартните означения  $\tilde{\nabla}$  и  $\nabla$  за свързаностите на Леви-Чевита съответно върху  $\mathbb{R}_1^4$  и  $M^2$ . Нека  $x$  и  $y$  са допирателни векторни полета към  $M^2$ , а  $\xi$  е нормално векторно поле на  $M^2$ . В сила са следните формули на Гаус и Вайнгартен [7]:

$$\tilde{\nabla}_x y = \nabla_x y + \sigma(x, y);$$

$$\tilde{\nabla}_x \xi = -A_\xi x + D_x \xi.$$

Чрез тези формули се дефинират вторият фундаментален тензор  $\sigma$ , нормалната свързаност  $D$  и линейният оператор  $A_\xi$ , съответстващ на векторното поле  $\xi$  (наричан *shape operator*). Връзката между оператора  $A_\xi$  и втория фундаментален тензор  $\sigma$  се задава чрез формулата:

$$\langle \sigma(x, y), \xi \rangle = \langle A_\xi x, y \rangle.$$

Чрез втория фундаментален тензор  $\sigma$  се дефинира и векторно поле на средната кривина  $H$  на повърхнината  $M^2$  по следния начин:

$$H = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \sigma.$$

Ако  $\{x, y\}$  е локална ортонормирана база на допирателното пространство, в случая на пространственоподобна повърхнина векторното поле на средната кривина се изразява по формулата

$$H = \frac{1}{2} (\sigma(x, x) + \sigma(y, y)),$$

а в случая на времеподобна повърхнина  $H$  има вида

$$H = \frac{1}{2} (-\sigma(x, x) + \sigma(y, y)),$$

където  $\langle x, x \rangle = -1$ ,  $\langle y, y \rangle = 1$ .

**Дефиниция 1.1.3.** Една повърхнина  $M^2$  в  $\mathbb{R}_1^4$  се нарича *минимална*, ако векторното поле на средната кривина е нула във всяка точка от повърхнината, т.е.  $H = 0$ .

Едно нормално векторно поле  $\xi$  върху повърхнина  $M^2$  се нарича *паралелно в нормалното пространство* (или само *паралелно*), ако е паралелно по отношение на нормалната свързаност  $D$ , т.е.  $D\xi = 0$  във всички точки на повърхнината [19]. Повърхнина  $M^2$  се нарича повърхнина с *паралелно векторно поле на средната кривина*, ако векторното ѝ поле на средната кривина  $H$  е паралелно, т.е.  $DH = 0$ . Класът на повърхнините с паралелно векторно поле на средната кривина е естествено разширен до класа на повърхнините с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина. Една повърхнина  $M^2$  се нарича повърхнина с *паралелно нормирано векторно поле на средната кривина*, ако  $H$  е ненулево векторно поле и съществува единично векторно поле по направление на  $H$ , което е паралелно в нормалното пространство [8]. Лесно се вижда, че ако  $M^2$  е повърхнина с ненулево паралелно векторно поле на средната кривина  $H$  (т.е.  $DH = 0$ ), то  $M^2$  е повърхнина с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина. Обратното, обаче, в общия случай не е вярно. В сила е само в случая, когато  $\|H\| = \text{const}$ .

Ако  $\{x, y\}$  е ортонормирана база от допирателни векторни полета на повърхнината  $M^2$ , то Гаусовата кривина  $K$  на повърхнината се определя по следната формула:

$$K = \frac{\langle \sigma(x, x), \sigma(y, y) \rangle - \langle \sigma(x, y), \sigma(x, y) \rangle}{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2}. \quad (1.1)$$

Тензорът на кривината  $R^D$  на нормалната свързаност  $D$  се дефинира чрез равенството:

$$R^D(x, y)n = D_x D_y n - D_y D_x n - D_{[x, y]} n,$$

където  $n$  е нормално векторно поле.

Кривината на нормалната свързаност  $\varkappa$  (наричана също *нормална кривина*) на повърхнината се определя чрез формулата:

$$\varkappa = \frac{\langle R^D(x, y)n_1, n_2 \rangle}{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2}, \quad (1.2)$$

където  $\{x, y\}$  е ортонормирана база от допирателни векторни полета, а  $\{n_1, n_2\}$  е ортонормирана база от нормални векторни полета.

В настоящия дисертационен труд ще изучаваме двумерни времеподобни повърхнини в 4-мерното пространство на Минковски  $\mathbb{R}_1^4$ .

## 1.2 Изображение на Вайнгартен за времеподобна повърхнина в $\mathbb{R}_1^4$

Разглеждаме времеподобна повърхнина  $M^2$  в  $\mathbb{R}_1^4$ , зададена със следната локална параметризация:  $z = z(u, v)$ ,  $(u, v) \in \mathcal{D}$  ( $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ ). В произволна точка  $p = z(u, v)$  от повърхнината  $M^2$  допирателното пространство е  $T_p M^2 = \text{span}\{z_u, z_v\}$ , където  $z_u = \frac{\partial z}{\partial u}$  и  $z_v = \frac{\partial z}{\partial v}$ . Използваме стандартните означения  $E = \langle z_u, z_u \rangle$ ,  $F = \langle z_u, z_v \rangle$ ,  $G = \langle z_v, z_v \rangle$  за коефициентите на първата основна форма на  $M^2$ .

Тъй като  $M^2$  е времеподобна повърхнина, без ограничение на общността считаме, че  $z_u$  е времеподобно векторно поле, а  $z_v$  е пространственоподобно. Следователно,  $E(u, v) < 0$  и  $G(u, v) > 0$ . Означаваме  $W = \sqrt{|EG - F^2|} = \sqrt{-EG + F^2}$ .

Избираме ортонормирана база  $\{n_1, n_2\}$  на нормалното пространство  $N_p M^2$  такава, че  $\langle n_1, n_1 \rangle = 1$ ,  $\langle n_2, n_2 \rangle = 1$ ,  $\langle n_1, n_2 \rangle = 0$ .

За производните на  $z(u, v)$  са в сила следните формули:

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{z_u} z_u &= z_{uu} = -\Gamma_{11}^1 z_u + \Gamma_{11}^2 z_v + c_{11}^1 n_1 + c_{11}^2 n_2 \\ \tilde{\nabla}_{z_u} z_v &= z_{uv} = -\Gamma_{12}^1 z_u + \Gamma_{12}^2 z_v + c_{12}^1 n_1 + c_{12}^2 n_2, \\ \tilde{\nabla}_{z_v} z_v &= z_{vv} = -\Gamma_{22}^1 z_u + \Gamma_{22}^2 z_v + c_{22}^1 n_1 + c_{22}^2 n_2\end{aligned}\tag{1.3}$$

които могат да се запишат в матричен вид по следния начин:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\nabla}_{z_u} z_u \\ \tilde{\nabla}_{z_u} z_v \\ \tilde{\nabla}_{z_v} z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{uu} \\ z_{uv} \\ z_{vv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Gamma_{11}^1 & \Gamma_{11}^2 \\ -\Gamma_{12}^1 & \Gamma_{12}^2 \\ -\Gamma_{22}^1 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_u \\ z_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11}^1 & c_{11}^2 \\ c_{12}^1 & c_{12}^2 \\ c_{22}^1 & c_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix},$$

където  $\Gamma_{ij}^k$  са символите на Кристофел, а функциите  $c_{ij}^k$ ,  $i, j, k = 1, 2$  се задават с равенствата

$$\begin{aligned}c_{11}^1 &= \langle z_{uu}, n_1 \rangle; & c_{11}^2 &= \langle z_{uu}, n_2 \rangle; \\ c_{12}^1 &= \langle z_{uv}, n_1 \rangle; & c_{12}^2 &= \langle z_{uv}, n_2 \rangle; \\ c_{22}^1 &= \langle z_{vv}, n_1 \rangle; & c_{22}^2 &= \langle z_{vv}, n_2 \rangle.\end{aligned}$$

Означаваме с  $\mathcal{C}$  следната матрица:

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} c_{11}^1 & c_{11}^2 \\ c_{12}^1 & c_{12}^2 \\ c_{22}^1 & c_{22}^2 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, повърхнината  $M^2$  лежи в двумерна равнина тогава и само тогава, когато е напълно геодезична, т.е.  $c_{ij}^k = 0$ ,  $i, j, k = 1, 2$  (матрицата  $\mathcal{C}$  е нулевата матрица). Затова считаме, че поне един от коефициентите  $c_{ij}^k$  е различен от нула, т.е.  $\mathcal{C}$  е различна от нулевата матрица, откъдето следва, че рангът ѝ е 1 или 2.

Разглеждаме следните детерминанти, които са трите минора от втори ред на матрицата  $\mathcal{C}$ :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} c_{11}^1 & c_{12}^1 \\ c_{11}^2 & c_{12}^2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11}^1 & c_{22}^1 \\ c_{11}^2 & c_{22}^2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} c_{12}^1 & c_{22}^1 \\ c_{12}^2 & c_{22}^2 \end{vmatrix}.$$

В произволна точка  $p \in M^2$ , подпространството, зададено чрез

$$\text{Im}\sigma_p = \text{span}\{\sigma(x, y) : x, y \in T_p M^2\}$$

се нарича *първо нормално пространство* на  $M^2$  в  $\mathbb{R}_1^4$  [7].

Очевидно е, че условието  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ , което е еквивалентно на  $\text{rank } \mathcal{C} = 1$ , характеризира точките, в които първото нормално пространство  $\text{Im}\sigma_p$  е с размерност 1. Такива точки се наричат *точки на изпъване* (или *инфлексни точки*) за повърхнината. Теорията за инфлексните точки за двумерни повърхнини в четиримерно афинно пространство  $\mathbb{A}^4$  е представена в [48] и [50]. Известно е, че всяка точка от повърхнина в  $\mathbb{A}^4$  е инфлексна тогава и само тогава, когато повърхнината е развиваема или лежи в тримерно пространство [48]. Затова по-нататък ще разглеждаме времеподобни повърхнини без инфлексни точки, т.е. считаме, че е изпълнено условието  $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3) \neq (0, 0, 0)$ , което е еквивалентно на  $\text{rank } \mathcal{C} = 2$ .

От равенствата (1.3) следва

$$\sigma(z_u, z_u) = c_{11}^1 n_1 + c_{11}^2 n_2$$

$$\sigma(z_u, z_v) = c_{12}^1 n_1 + c_{12}^2 n_2,$$

$$\sigma(z_v, z_v) = c_{22}^1 n_1 + c_{22}^2 n_2$$



което се записва в матричен вид с:

$$\begin{pmatrix} \sigma(z_u, z_u) \\ \sigma(z_u, z_v) \\ \sigma(z_v, z_v) \end{pmatrix} = \mathcal{C} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}.$$

Дефинираме функциите  $L, M, N$  по следния начин:

$$L(u, v) = \frac{2\Delta_1}{W}, \quad M(u, v) = \frac{\Delta_2}{W}, \quad N(u, v) = \frac{2\Delta_3}{W}.$$

Сега ще разгледаме как се променят функциите  $E, F, G$  и  $L, M, N$  при гладка смяна на параметризацията на  $M^2$ . Нека

$$\Phi : \begin{cases} u = u(\bar{u}, \bar{v}) \\ v = v(\bar{u}, \bar{v}) \end{cases}, \quad (\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{\mathcal{D}}, \quad \bar{\mathcal{D}} \subset \mathbb{R}^2$$

е гладка смяна на параметрите  $(u, v)$  на  $M^2$  с матрица  $J_\Phi = \begin{pmatrix} u_{\bar{u}} & v_{\bar{u}} \\ u_{\bar{v}} & v_{\bar{v}} \end{pmatrix}$  и детерминанта  $J = \det J_\Phi = \begin{vmatrix} u_{\bar{u}} & v_{\bar{u}} \\ u_{\bar{v}} & v_{\bar{v}} \end{vmatrix} \neq 0$  във всяка точка от областта. Тогава:

$$\begin{aligned} z_{\bar{u}} &= z_u u_{\bar{u}} + z_v v_{\bar{u}} \\ z_{\bar{v}} &= z_u u_{\bar{v}} + z_v v_{\bar{v}} \end{aligned}, \quad (1.4)$$

т.е.

$$\begin{pmatrix} z_{\bar{u}} \\ z_{\bar{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\bar{u}} & v_{\bar{u}} \\ u_{\bar{v}} & v_{\bar{v}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_u \\ z_v \end{pmatrix},$$

което е еквивалентно на

$$\begin{pmatrix} z_{\bar{u}} \\ z_{\bar{v}} \end{pmatrix} = J_\Phi \begin{pmatrix} z_u \\ z_v \end{pmatrix}.$$

Означаваме  $\bar{E} = \langle z_{\bar{u}}, z_{\bar{u}} \rangle$ ,  $\bar{F} = \langle z_{\bar{u}}, z_{\bar{v}} \rangle$  и  $\bar{G} = \langle z_{\bar{v}}, z_{\bar{v}} \rangle$ . Тогава:

$$\bar{E} = Eu_{\bar{u}}^2 + 2Fu_{\bar{u}}v_{\bar{u}} + Gv_{\bar{u}}^2 = (u_{\bar{u}}, v_{\bar{u}}) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\bar{u}} \\ v_{\bar{u}} \end{pmatrix};$$

$$\bar{F} = Eu_{\bar{u}}u_{\bar{v}} + F(u_{\bar{u}}v_{\bar{v}} + u_{\bar{v}}v_{\bar{u}}) + Gv_{\bar{u}}v_{\bar{v}} = (u_{\bar{u}}, v_{\bar{u}}) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\bar{v}} \\ v_{\bar{v}} \end{pmatrix};$$

$$\bar{G} = Eu_{\bar{v}}^2 + 2Fu_{\bar{v}}v_{\bar{v}} + Gv_{\bar{v}}^2 = (u_{\bar{v}}, v_{\bar{v}}) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\bar{v}} \\ v_{\bar{v}} \end{pmatrix}.$$

Следователно, връзката между коефициентите на първата основна форма при смяна на параметризацията се задава с:

$$\begin{pmatrix} \bar{E} \\ \bar{F} \\ \bar{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\bar{u}}^2 & 2u_{\bar{u}}v_{\bar{u}} & v_{\bar{u}}^2 \\ u_{\bar{u}}u_{\bar{v}} & (u_{\bar{u}}v_{\bar{v}} + u_{\bar{v}}v_{\bar{u}}) & v_{\bar{u}}v_{\bar{v}} \\ u_{\bar{v}}^2 & 2u_{\bar{v}}v_{\bar{v}} & v_{\bar{v}}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ F \\ G \end{pmatrix}.$$

Като използваме, че  $W = \sqrt{-EG + F^2}$  и матричните записи за  $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ , пресмятаме, че  $\bar{W} = \sqrt{|\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2|} = \sqrt{|-J^2W^2|} = |J|W = \varepsilon JW$ , където  $\varepsilon = \text{sign } J$ . С това инвариантността на коефициентите на първата основна форма при гладка смяна на параметризацията е показана.

За проверка на инвариантността на функциите  $L, M, N$  при гладката смяна  $\Phi$  трябва да намерим матрицата  $\bar{\mathcal{C}} = \{\bar{c}_{ij}^k\}$  и нейните минори  $\bar{\Delta}_1, \bar{\Delta}_2, \bar{\Delta}_3$ . За целта първо ще пресметнем вторите производни на  $z_{\bar{u}}, z_{\bar{v}}$ . Като използваме, че

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{u}} &= \frac{\partial}{\partial u} u_{\bar{u}} + \frac{\partial}{\partial v} v_{\bar{u}} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{v}} &= \frac{\partial}{\partial u} u_{\bar{v}} + \frac{\partial}{\partial v} v_{\bar{v}} \end{aligned},$$

от формули (1.4) получаваме

$$\begin{aligned} z_{\bar{u}\bar{u}} &= z_{uu}u_{\bar{u}}^2 + 2z_{uv}u_{\bar{u}}v_{\bar{u}} + z_{vv}v_{\bar{u}}^2 + z_u u_{\bar{u}\bar{u}} + z_v v_{\bar{u}\bar{u}} = \\ &= (u_{\bar{u}}, v_{\bar{u}}) \begin{pmatrix} z_{uu} & z_{uv} \\ z_{uv} & z_{vv} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\bar{u}} \\ v_{\bar{u}} \end{pmatrix} + (u_{\bar{u}\bar{u}}, v_{\bar{u}\bar{u}}) \begin{pmatrix} z_u \\ z_v \end{pmatrix}; \\ z_{\bar{u}\bar{v}} &= z_{uu}u_{\bar{u}}u_{\bar{v}} + z_{uv}(u_{\bar{u}}v_{\bar{v}} + u_{\bar{v}}v_{\bar{u}}) + z_{vv}v_{\bar{u}}v_{\bar{v}} + z_u u_{\bar{u}\bar{v}} + z_v v_{\bar{u}\bar{v}} = \\ &= (u_{\bar{u}}, v_{\bar{u}}) \begin{pmatrix} z_{uu} & z_{uv} \\ z_{uv} & z_{vv} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\bar{v}} \\ v_{\bar{v}} \end{pmatrix} + (u_{\bar{u}\bar{v}}, v_{\bar{u}\bar{v}}) \begin{pmatrix} z_u \\ z_v \end{pmatrix}; \\ z_{\bar{v}\bar{v}} &= z_{uu}u_{\bar{v}}^2 + 2z_{uv}u_{\bar{v}}v_{\bar{v}} + z_{vv}v_{\bar{v}}^2 + z_u u_{\bar{v}\bar{v}} + z_v v_{\bar{v}\bar{v}} = \\ &= (u_{\bar{v}}, v_{\bar{v}}) \begin{pmatrix} z_{uu} & z_{uv} \\ z_{uv} & z_{vv} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\bar{v}} \\ v_{\bar{v}} \end{pmatrix} + (u_{\bar{v}\bar{v}}, v_{\bar{v}\bar{v}}) \begin{pmatrix} z_u \\ z_v \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Като използваме матричните записи за получените частни производни и това, че  $n_1, n_2 \in N_p M^2$  и са перпендикулярни на  $z_u, z_v$ , получаваме функциите  $\bar{c}_{ij}^k$ :

$$\bar{c}_{11}^1 = \langle z_{\bar{u}\bar{u}}, n_1 \rangle = (u_{\bar{u}}, v_{\bar{u}}) \begin{pmatrix} \langle z_{uu}, n_1 \rangle & \langle z_{uv}, n_1 \rangle \\ \langle z_{uv}, n_1 \rangle & \langle z_{vv}, n_1 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\bar{u}} \\ v_{\bar{u}} \end{pmatrix} = (u_{\bar{u}}, v_{\bar{u}}) \begin{pmatrix} c_{11}^1 & c_{12}^1 \\ c_{12}^1 & c_{22}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\bar{u}} \\ v_{\bar{u}} \end{pmatrix};$$

$$\bar{c}_{11}^2 = \langle z_{\bar{u}\bar{u}}, n_2 \rangle = (u_{\bar{u}}, v_{\bar{u}}) \begin{pmatrix} \langle z_{uu}, n_2 \rangle & \langle z_{uv}, n_2 \rangle \\ \langle z_{uv}, n_2 \rangle & \langle z_{vv}, n_2 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\bar{u}} \\ v_{\bar{u}} \end{pmatrix} = (u_{\bar{u}}, v_{\bar{u}}) \begin{pmatrix} c_{11}^2 & c_{12}^2 \\ c_{12}^2 & c_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\bar{u}} \\ v_{\bar{u}} \end{pmatrix};$$

$$\bar{c}_{12}^1 = \langle z_{\bar{u}\bar{v}}, n_1 \rangle = (u_{\bar{u}}, v_{\bar{u}}) \begin{pmatrix} \langle z_{uu}, n_1 \rangle & \langle z_{uv}, n_1 \rangle \\ \langle z_{uv}, n_1 \rangle & \langle z_{vv}, n_1 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\bar{v}} \\ v_{\bar{v}} \end{pmatrix} = (u_{\bar{u}}, v_{\bar{u}}) \begin{pmatrix} c_{11}^1 & c_{12}^1 \\ c_{12}^1 & c_{22}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\bar{v}} \\ v_{\bar{v}} \end{pmatrix};$$

$$\bar{c}_{12}^2 = \langle z_{\bar{u}\bar{v}}, n_2 \rangle = (u_{\bar{u}}, v_{\bar{u}}) \begin{pmatrix} \langle z_{uu}, n_2 \rangle & \langle z_{uv}, n_2 \rangle \\ \langle z_{uv}, n_2 \rangle & \langle z_{vv}, n_2 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\bar{v}} \\ v_{\bar{v}} \end{pmatrix} = (u_{\bar{u}}, v_{\bar{u}}) \begin{pmatrix} c_{11}^2 & c_{12}^2 \\ c_{12}^2 & c_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\bar{v}} \\ v_{\bar{v}} \end{pmatrix};$$

$$\bar{c}_{22}^1 = \langle z_{\bar{v}\bar{v}}, n_1 \rangle = (u_{\bar{v}}, v_{\bar{v}}) \begin{pmatrix} \langle z_{uu}, n_1 \rangle & \langle z_{uv}, n_1 \rangle \\ \langle z_{uv}, n_1 \rangle & \langle z_{vv}, n_1 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\bar{v}} \\ v_{\bar{v}} \end{pmatrix} = (u_{\bar{v}}, v_{\bar{v}}) \begin{pmatrix} c_{11}^1 & c_{12}^1 \\ c_{12}^1 & c_{22}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\bar{v}} \\ v_{\bar{v}} \end{pmatrix};$$

$$\bar{c}_{22}^2 = \langle z_{\bar{v}\bar{v}}, n_2 \rangle = (u_{\bar{v}}, v_{\bar{v}}) \begin{pmatrix} \langle z_{uu}, n_2 \rangle & \langle z_{uv}, n_2 \rangle \\ \langle z_{uv}, n_2 \rangle & \langle z_{vv}, n_2 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\bar{v}} \\ v_{\bar{v}} \end{pmatrix} = (u_{\bar{v}}, v_{\bar{v}}) \begin{pmatrix} c_{11}^2 & c_{12}^2 \\ c_{12}^2 & c_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\bar{v}} \\ v_{\bar{v}} \end{pmatrix}.$$

С помощта на горните равенства за  $\bar{\Delta}_1$  получаваме:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_1 &= \begin{vmatrix} \bar{c}_{11}^1 & \bar{c}_{12}^1 \\ \bar{c}_{11}^2 & \bar{c}_{12}^2 \end{vmatrix} = \bar{c}_{11}^1 \bar{c}_{12}^2 - \bar{c}_{11}^2 \bar{c}_{12}^1 \\ &= (u_{\bar{u}}, v_{\bar{u}}) \begin{pmatrix} c_{11}^1 & c_{12}^1 \\ c_{12}^1 & c_{22}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\bar{u}} \\ v_{\bar{u}} \end{pmatrix} (u_{\bar{u}}, v_{\bar{u}}) \begin{pmatrix} c_{11}^2 & c_{12}^2 \\ c_{12}^2 & c_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\bar{v}} \\ v_{\bar{v}} \end{pmatrix} \\ &\quad - (u_{\bar{u}}, v_{\bar{u}}) \begin{pmatrix} c_{11}^2 & c_{12}^2 \\ c_{12}^2 & c_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\bar{u}} \\ v_{\bar{u}} \end{pmatrix} (u_{\bar{u}}, v_{\bar{u}}) \begin{pmatrix} c_{11}^1 & c_{12}^1 \\ c_{12}^1 & c_{22}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\bar{v}} \\ v_{\bar{v}} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

което след опростяване ни дава

$$\bar{\Delta}_1 = J(\Delta_1 u_{\bar{u}}^2 + \Delta_2 u_{\bar{u}} v_{\bar{u}} + \Delta_3 v_{\bar{u}}^2).$$

С аналогични пресмятания за  $\bar{\Delta}_2$  и  $\bar{\Delta}_3$  получаваме:

$$\bar{\Delta}_2 = J(2u_{\bar{u}}u_{\bar{v}}\Delta_1 + (u_{\bar{u}}v_{\bar{v}} + u_{\bar{v}}v_{\bar{u}})\Delta_2 + 2v_{\bar{u}}v_{\bar{v}}\Delta_3),$$

$$\bar{\Delta}_3 = J(\Delta_1 u_{\bar{v}}^2 + \Delta_2 u_{\bar{v}}v_{\bar{v}} + \Delta_3 v_{\bar{v}}^2).$$

Така получаваме следните формули:

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}_1 &= J(\Delta_1 u_u^2 + \Delta_2 u_u v_u + \Delta_3 v_u^2); \\ \bar{\Delta}_2 &= J(2u_u u_v \Delta_1 + (u_u v_v + u_v v_u) \Delta_2 + 2v_u v_v \Delta_3); \\ \bar{\Delta}_3 &= J(\Delta_1 u_v^2 + \Delta_2 u_v v_v + \Delta_3 v_v^2),\end{aligned}$$

които в матричен вид се записват по следния начин:

$$\begin{pmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} u_u^2 & u_u v_u & v_u^2 \\ 2u_u u_v & (u_u v_v + u_v v_u) & 2v_u v_v \\ u_v^2 & u_v v_v & v_v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{pmatrix}.$$

Следователно, за функциите  $L, M, N$  имаме следната връзка:

$$\begin{pmatrix} \bar{L} \\ \bar{M} \\ \bar{N} \end{pmatrix} = \frac{1}{W} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \end{pmatrix},$$

откъдето след пресмятания получаваме

$$\begin{pmatrix} \bar{L} \\ \bar{M} \\ \bar{N} \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} u_u^2 & 2u_u v_u & v_u^2 \\ u_u u_v & (u_u v_v + u_v v_u) & v_u v_v \\ u_v^2 & 2u_v v_v & v_v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix}.$$

Последният резултат може да бъде записан в следния вид

$$\begin{aligned}\bar{L} &= \varepsilon(u_u^2 L + 2M u_u v_u + v_u^2 N) \\ \bar{M} &= \varepsilon(u_u u_v L + (u_u v_v + u_v v_u) M + v_u v_v N) \\ \bar{N} &= \varepsilon(u_v^2 L + 2M u_v v_v + v_v^2 N)\end{aligned} \tag{1.5}$$

Следователно, функциите  $L, M, N$  се сменят по същия начин, както коефициентите на първата основна форма  $E, F, G$  при произволна смяна на параметрите на  $M^2$ . Това ни дава основание да разгледаме квадратична форма с коефициенти  $L, M$  и  $N$ . Нека  $X \in T_p M^2$  е допирателно векторно поле, за което имаме следното разлагане спрямо базите  $\{z_u, z_v\}$  и  $\{z_{\bar{u}}, z_{\bar{v}}\}$ :

$$X = \lambda z_u + \mu z_v = \bar{\lambda} z_{\bar{u}} + \bar{\mu} z_{\bar{v}}, \text{ т.е. } X = (z_u, z_v) \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = (z_{\bar{u}}, z_{\bar{v}}) \begin{pmatrix} \bar{\lambda} \\ \bar{\mu} \end{pmatrix}.$$

Тогава връзката между координатите на  $X$  при двете параметризации е

$$\lambda = u_{\bar{u}}\bar{\lambda} + u_{\bar{v}}\bar{\mu}; \quad \mu = v_{\bar{u}}\bar{\lambda} + v_{\bar{v}}\bar{\mu}, \quad \text{т.е.} \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\bar{u}} & u_{\bar{v}} \\ v_{\bar{u}} & v_{\bar{v}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\lambda} \\ \bar{\mu} \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Ще покажем, че за всеки две допирателни векторни полета  $X_1 = \lambda_1 z_u + \mu_1 z_v$  и  $X_2 = \lambda_2 z_u + \mu_2 z_v$  е в сила

$$\bar{L}\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2 + \bar{M}(\bar{\lambda}_1\bar{\mu}_2 + \bar{\mu}_1\bar{\lambda}_2) + \bar{N}\bar{\mu}_1\bar{\mu}_2 = \varepsilon(L\lambda_1\lambda_2 + M(\lambda_1\mu_2 + \mu_1\lambda_2) + N\mu_1\mu_2),$$

$$\text{т.е. } (\bar{\lambda}_1, \bar{\mu}_1) \begin{pmatrix} \bar{L} & \bar{M} \\ \bar{M} & \bar{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_2 \\ \bar{\mu}_2 \end{pmatrix} = \varepsilon(\lambda_1, \mu_1) \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix}.$$

От равенствата (1.5) получаваме:

$$\begin{pmatrix} \bar{L} & \bar{M} \\ \bar{M} & \bar{N} \end{pmatrix} = \varepsilon J_{\phi}^T \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} J_{\phi}.$$

За  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$  и  $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2$  от (1.6) получаваме:

$$(\bar{\lambda}_1, \bar{\mu}_1) = (\lambda_1, \mu_1)(J_{\phi}^T)^{-1}; \quad (\bar{\lambda}_2, \bar{\mu}_2) = (\lambda_2, \mu_2)(J_{\phi}^T)^{-1}.$$

Следователно,

$$\bar{L}\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2 + \bar{M}(\bar{\lambda}_1\bar{\mu}_2 + \bar{\mu}_1\bar{\lambda}_2) + \bar{N}\bar{\mu}_1\bar{\mu}_2 = \varepsilon(\lambda_1, \mu_1) \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix}.$$

Това ни позволява да дефинираме втора основна форма  $II$  за повърхнината  $M^2$  в точка  $p \in M^2$  по следния начин: нека  $X = \lambda z_u + \mu z_v$ ,  $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$  е допирателен вектор в точка  $p \in M^2$ . Дефинираме

$$II(\lambda, \mu) = L\lambda^2 + 2M\lambda\mu + N\mu^2 = (\lambda, \mu) \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \quad (1.7)$$

Сега ще проверим как функциите  $L, M, N$  зависят от избора на база на нормалното пространство. Нека  $\{\tilde{n}_1, \tilde{n}_2\}$  е друга база на  $N_p M^2$ , такава че  $\langle \tilde{n}_1, \tilde{n}_1 \rangle = 1$ ,  $\langle \tilde{n}_1, \tilde{n}_2 \rangle = 0$ ,  $\langle \tilde{n}_2, \tilde{n}_2 \rangle = 1$ , като връзката между двете бази се задава с формулите:

$$\begin{aligned} \tilde{n}_1 &= \cos \theta n_1 + \eta \sin \theta n_2 \\ \tilde{n}_2 &= -\sin \theta n_1 + \eta \cos \theta n_2, \end{aligned} \quad \eta = \pm 1, \quad (1.8)$$

където  $\theta$  е гладка функция, а  $\eta = 1$ , когато  $\{\tilde{n}_1, \tilde{n}_2\}$  и  $\{n_1, n_2\}$  са еднакво ориентирани

и  $\eta = -1$ , когато са противоположно ориентирани. Формулите (1.8) се записват в матричен вид:

$$\begin{pmatrix} \tilde{n}_1 \\ \tilde{n}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \eta \sin \theta \\ -\sin \theta & \eta \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix},$$

Нека  $A_\theta$  е матрицата на прехода между базите  $\{\tilde{n}_1, \tilde{n}_2\}$  и  $\{n_1, n_2\}$ , т.е.

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \eta \sin \theta \\ -\sin \theta & \eta \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Коефициентите на първата основна форма се запазват понеже  $z_u$  и  $z_v$  не се променят и следователно, като използваме връзката (1.8) между двете бази  $\{\tilde{n}_1, \tilde{n}_2\}$  и  $\{n_1, n_2\}$ , за коефициентите  $\tilde{c}_{ij}^k$  и  $c_{ij}^k$  намираме:

$$\tilde{c}_{ij}^1 \tilde{n}_1 + \tilde{c}_{ij}^2 \tilde{n}_2 = c_{ij}^1 n_1 + c_{ij}^2 n_2, \text{ т.е. } (\tilde{c}_{ij}^1, \tilde{c}_{ij}^2) \begin{pmatrix} \tilde{n}_1 \\ \tilde{n}_2 \end{pmatrix} = (c_{ij}^1, c_{ij}^2) \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}.$$

Следователно, за матрицата  $\tilde{\mathcal{C}}$  имаме следното представяне:

$$\tilde{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \tilde{c}_{11}^1 & \tilde{c}_{11}^2 \\ \tilde{c}_{12}^1 & \tilde{c}_{12}^2 \\ \tilde{c}_{22}^1 & \tilde{c}_{22}^2 \end{pmatrix} = \mathcal{C} A_\theta^T,$$

където  $A_\theta^T$  е транспонираната матрица. Тогава, за функциите  $\tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2, \tilde{\Delta}_3$  получаваме:

$$\tilde{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} \tilde{c}_{11}^1 & \tilde{c}_{12}^1 \\ \tilde{c}_{11}^2 & \tilde{c}_{12}^2 \end{vmatrix} = \underbrace{|A_\theta|}_{=\eta} \begin{vmatrix} c_{11}^1 & c_{12}^1 \\ c_{11}^2 & c_{12}^2 \end{vmatrix}, \text{ т.е. } \tilde{\Delta}_1 = \eta \Delta_1.$$

Аналогично намираме

$$\tilde{\Delta}_2 = \eta \Delta_2, \quad \tilde{\Delta}_3 = \eta \Delta_3.$$

Следователно, за коефициентите на втората основна форма имаме следните връзки:

$$\tilde{L} = \eta L, \quad \tilde{M} = \eta M, \quad \tilde{N} = \eta N.$$

И така, дефинираната чрез (1.7) втора основна форма  $II$  е инвариантна при смяна на базата на нормалното пространство на повърхнината и е инвариантна с точност до знак при смяна на базата на допирателното пространство.

Такава квадратична форма е разглеждана за двумерна повърхнина в 4-мерно афинно пространство  $\mathbb{A}^4$  (виж напр. [5, 48, 66]). В настоящия дисертационен труд ние разглеждаме втора основна форма за времеподобни повърхнини в пространство

на Минковски  $\mathbb{R}_1^4$ , като целта ни е с помощта и на първата основна форма да разработим локална теория на времеподобните повърхнини по подобие на теорията на повърхнините в  $\mathbb{E}^4$  [32, 33] и на пространственоподобните повърхнини в  $\mathbb{E}_1^4$  [35].

Като използваме втората основна форма  $II$ , можем да разгледаме изображение от типа на изображението на Вайнгартен,

$$\gamma : T_p M^2 \rightarrow T_p M^2,$$

което се дефинира във всяка точка на  $M^2$  по стандартния начин:

$$\begin{aligned} \gamma(z_u) &= \gamma_1^1 z_u + \gamma_1^2 z_v, \\ \gamma(z_v) &= \gamma_2^1 z_u + \gamma_2^2 z_v, \end{aligned} \quad \text{т.е.} \quad \begin{pmatrix} \gamma(z_u) \\ \gamma(z_v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1^1 & \gamma_1^2 \\ \gamma_2^1 & \gamma_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_u \\ z_v \end{pmatrix},$$

като функциите  $\gamma_i^j$ ,  $i, j = 1, 2$  се задават със следните равенства:

$$\gamma_1^1 = \frac{FM - GL}{EG - F^2}, \quad \gamma_1^2 = \frac{FL - EM}{EG - F^2}, \quad \gamma_2^1 = \frac{FN - GM}{EG - F^2}, \quad \gamma_2^2 = \frac{FM - EN}{EG - F^2}.$$

Както в теорията на повърхнините в  $\mathbb{R}^4$  и пространственоподобните повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$ , така и тук, линейното изображение  $\gamma$  е инвариантно при смяна на параметрите на повърхнината и смяна на базата на нормалното пространство. В общия случай  $\gamma$  не може да се диагонализира.

Аналогично на класическата диференциална геометрия на повърхнини в  $\mathbb{R}^3$  изображението  $\gamma$  поражда следните функции:

$$\begin{aligned} k &= \det \gamma = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \\ \varkappa &= -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \gamma = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)}, \end{aligned}$$

които са инвариантни при смяна на параметрите на повърхнината и смяна на базата на нормалното пространство.

Ще докажем, че функцията  $\varkappa$ , дефинирана чрез коефициентите на първата и втората основни форми по горната формула, съвпада с кривината на нормалната свързаност на повърхнината  $M^2$ .

Без ограничение на общността считаме, че параметризацията на повърхнината е такава, че  $F = 0$ . Нека  $x$  и  $y$  са единични векторни полета по направленията съответно на  $z_u$  и  $z_v$ , т.е.  $x = \frac{z_u}{\sqrt{-E}}$ ,  $y = \frac{z_v}{\sqrt{G}}$ . Нека  $\{n_1, n_2\}$  е ортонормирана база на нормалното пространство  $N_p M^2$ . Означаваме с  $A_1$  (съответно  $A_2$ ) оператора, съответстващ на  $n_1$  (съотв.  $n_2$ ).

Понеже тензорът на кривина  $\tilde{R}$  на свързаността  $\tilde{\nabla}$  е тъждествено равен на нула, то е в сила:

$$\tilde{R}(x, y)n_1 = 0, \text{ т.е. } \tilde{\nabla}_x \tilde{\nabla}_y n_1 - \tilde{\nabla}_y \tilde{\nabla}_x n_1 - \tilde{\nabla}_{[x, y]} n_1 = 0.$$

Следователно, и допирателната, и нормалната компоненти на  $\tilde{R}(x, y)n_1$  ще бъдат едновременно равни на нула. Нормалната компонента е:

$$D_x D_y n_1 - D_y D_x n_1 - D_{[x, y]} n_1 - \sigma(x, A_1(y)) + \sigma(y, A_1(x)).$$

Следователно,

$$D_x D_y n_1 - D_y D_x n_1 - D_{[x, y]} n_1 = \sigma(x, A_1(y)) - \sigma(y, A_1(x)).$$

Лявата страна на последното равенство е точно  $R^D(x, y)n_1$ . Следователно,

$$\langle R^D(x, y)n_1, n_2 \rangle = \langle \sigma(x, A_1(y)), n_2 \rangle - \langle \sigma(y, A_1(x)), n_2 \rangle = \langle (A_2 \circ A_1 - A_1 \circ A_2)(y), x \rangle. \quad (1.9)$$

Разглеждаме действието на оператора  $A_2 \circ A_1 - A_1 \circ A_2$  върху допирателните векторни полета  $x$  и  $y$ . За втория фундаментален тензор  $\sigma$  имаме:

$$\begin{aligned} \sigma(x, x) &= \sigma\left(\frac{z_u}{\sqrt{-E}}, \frac{z_u}{\sqrt{-E}}\right) = \frac{1}{-E} \sigma(z_u, z_u) = \left(\frac{c_{11}^1}{-E}, \frac{c_{11}^2}{-E}\right) \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}, \\ \sigma(x, y) &= \sigma\left(\frac{z_u}{\sqrt{-E}}, \frac{z_v}{\sqrt{G}}\right) = \frac{1}{\sqrt{-EG}} \sigma(z_u, z_v) = \left(\frac{c_{12}^1}{\sqrt{-EG}}, \frac{c_{12}^2}{\sqrt{-EG}}\right) \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}, \\ \sigma(y, y) &= \sigma\left(\frac{z_v}{\sqrt{G}}, \frac{z_v}{\sqrt{G}}\right) = \frac{1}{G} \sigma(z_v, z_v) = \left(\frac{c_{22}^1}{G}, \frac{c_{22}^2}{G}\right) \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Следователно, за втория фундаментален тензор  $\sigma$  получаваме:

$$\begin{pmatrix} \sigma(x, x) \\ \sigma(x, y) \\ \sigma(y, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c_{11}^1}{-E} & \frac{c_{11}^2}{-E} \\ \frac{c_{12}^1}{\sqrt{-EG}} & \frac{c_{12}^2}{\sqrt{-EG}} \\ \frac{c_{22}^1}{G} & \frac{c_{22}^2}{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

С помощта на последните формули пресмятаме векторните полета  $A_1(x)$ ,  $A_1(y)$ ,  $A_2(x)$ ,  $A_2(y)$ , като търсим разлагането им по базата  $\{x, y\}$ . След пресмятане получаваме:

$$A_1(x) = -\langle A_1(x), x \rangle x + \langle A_1(x), y \rangle y = -\langle \sigma(x, x), n_1 \rangle x + \langle \sigma(x, y), n_1 \rangle y = \frac{c_{11}^1}{E} x + \frac{c_{12}^1}{\sqrt{-EG}} y,$$



$$A_1(y) = -\langle A_1(y), x \rangle x + \langle A_1(y), y \rangle y = -\langle \sigma(x, y), n_1 \rangle x + \langle \sigma(y, y), n_1 \rangle y = \frac{-c_{12}^1}{\sqrt{-EG}}x + \frac{c_{22}^1}{G}y,$$

$$A_2(x) = -\langle A_2(x), x \rangle x + \langle A_2(x), y \rangle y = -\langle \sigma(x, x), n_2 \rangle x + \langle \sigma(x, y), n_2 \rangle y = \frac{c_{11}^2}{E}x + \frac{c_{12}^2}{\sqrt{-EG}}y,$$

$$A_2(y) = -\langle A_2(y), x \rangle x + \langle A_2(y), y \rangle y = -\langle \sigma(x, y), n_2 \rangle x + \langle \sigma(y, y), n_2 \rangle y = \frac{-c_{12}^2}{\sqrt{-EG}}x + \frac{c_{22}^2}{G}y.$$

И така, получаваме следните формули за векторните полета  $A_1(x)$ ,  $A_1(y)$ ,  $A_2(x)$ ,  $A_2(y)$ :

$$\begin{aligned} A_1(x) &= \frac{c_{11}^1}{E}x + \frac{c_{12}^1}{\sqrt{-EG}}y, & A_2(x) &= \frac{c_{11}^2}{E}x + \frac{c_{12}^2}{\sqrt{-EG}}y, \\ A_1(y) &= \frac{-c_{12}^1}{\sqrt{-EG}}x + \frac{c_{22}^1}{G}y, & A_2(y) &= \frac{-c_{12}^2}{\sqrt{-EG}}x + \frac{c_{22}^2}{G}y. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Взимайки предвид (1.11), изчисляваме  $(A_2 \circ A_1 - A_1 \circ A_2)(x)$  и  $(A_2 \circ A_1 - A_1 \circ A_2)(y)$ :

$$\begin{aligned} (A_2 \circ A_1 - A_1 \circ A_2)(x) &= A_2(A_1(x)) - A_1(A_2(x)) = \\ &= A_2\left(\frac{c_{11}^1}{E}x + \frac{c_{12}^1}{\sqrt{-EG}}y\right) - A_1\left(\frac{c_{11}^2}{E}x + \frac{c_{12}^2}{\sqrt{-EG}}y\right) \\ &= \left(\frac{c_{11}^1}{E}A_2(x) + \frac{c_{12}^1}{\sqrt{-EG}}A_2(y)\right) - \left(\frac{c_{11}^2}{E}A_1(x) + \frac{c_{12}^2}{\sqrt{-EG}}A_1(y)\right) \\ &= \left(\frac{\Delta_1}{E\sqrt{-EG}} + \frac{\Delta_3}{G\sqrt{-EG}}\right)y = \frac{EN + GL}{2EG}y. \end{aligned}$$

Аналогично имаме

$$(A_2 \circ A_1 - A_1 \circ A_2)(y) = A_2(A_1(y)) - A_1(A_2(y)) = \frac{EN + GL}{2EG}x.$$

Така, получаваме:

$$(A_2 \circ A_1 - A_1 \circ A_2)(x) = \varkappa y;$$

$$(A_2 \circ A_1 - A_1 \circ A_2)(y) = \varkappa x.$$

След пресмятане на скаларните произведения получаваме

$$\begin{aligned} \langle (A_2 \circ A_1 - A_1 \circ A_2)(x), y \rangle &= \varkappa; \\ \langle (A_2 \circ A_1 - A_1 \circ A_2)(y), x \rangle &= -\varkappa. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Да отбележим, че  $A_2 \circ A_1 - A_1 \circ A_2$  е антисиметричен инвариантен оператор в допира-  
телното пространство на повърхнината, т.е. не зависи от избора на ортонормираната  
база  $\{x, y\}$  на  $T_p M^2$ .

Окончателно, от равенствата (1.9) и (1.12) получаваме  $\langle R^D(x, y)n_1, n_2 \rangle = -\varkappa$ .

Следователно,

$$\langle R^D(x, y)n_2, n_1 \rangle = \varkappa.$$

Тъй като  $\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2 = -1$ , лявата страна на последното равенство е точно кривината на нормалната свързаност на повърхнината.

Аналогично на класическата диференциална геометрия на повърхнини в  $\mathbb{R}^3$ , втората основна форма  $II$  на повърхнина  $M^2$  в  $\mathbb{R}_1^4$  определя спрегнати допирателни в точка  $p$  от повърхнината.

**Дефиниция 1.2.1.** Две допирателни  $g_1 : X_1 = \lambda_1 z_u + \mu_1 z_v$  и  $g_2 : X_2 = \lambda_2 z_u + \mu_2 z_v$  се наричат *спрегнати*, ако

$$L\lambda_1\lambda_2 + M(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1) + N\mu_1\mu_2 = 0,$$

което в матричен вид се записва така:

$$(\lambda_1, \mu_1) \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = 0.$$

В точка  $p$  от повърхнината  $M^2$  можем да дефинираме асимптотични и главни допирателни по стандартния за  $\mathbb{R}^3$  начин:

**Дефиниция 1.2.2.** Една допирателна  $g : X = \lambda z_u + \mu z_v$  се нарича *асимптотична*, ако е самоспрегната.

Асимптотичните допирателни в точка  $p \in M^2$  се определят с равенството

$$L\lambda^2 + 2M\lambda\mu + N\mu^2 = 0,$$

което в матричен вид се записва с:

$$(\lambda, \mu) \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = 0.$$

**Дефиниция 1.2.3.** Една допирателна  $g : X = \lambda z_u + \mu z_v$  се нарича *главна*, ако е ортогонална на своята спрегната.

Главните допирателни в точка  $p \in M^2$  се определят с равенството

$$(EM - FL)\lambda^2 + (EN - GL)\lambda\mu + (FN - GM)\mu^2 = 0. \quad (1.13)$$

Понятията асимптотични и главни линии възникват по естествен начин. Една линия  $c : u = u(q), v = v(q); q \in J \subset \mathbb{R}$  върху  $M^2$  се нарича *асимптотична*

(съответно *главна*), ако допирателните ѝ във всяка нейна точка са асимптотични (съответно главни).

Тук трябва да отбележим, че в теорията на повърхнините в 4-мерното Евклидово пространство  $\mathbb{E}^4$ , както и в теорията на пространственоподобните повърхнини в 4-мерното пространство на Минковски  $\mathbb{E}_1^4$ , уравнението (1.13) винаги има решения, тъй като дискриминанта му е по-голяма или равна на 0. Затова във всяка точка от повърхнина в  $\mathbb{E}^4$  или от пространственоподобна повърхнина в  $\mathbb{E}_1^4$  съществуват главни линии.

В случая на времеподобна повърхнина в  $\mathbb{R}_1^4$  съществуването на решения на уравнението (1.13) зависи от знака на функцията  $\varkappa^2 - k$ . Чрез непосредствено пресмятане се получава, че дискриминантата  $D$  на уравнението (1.13) е

$$D = 4(EG - F^2)^2(\varkappa^2 - k).$$

Следователно, в случая, когато  $\varkappa^2 - k > 0$ , във всяка точка от повърхнината съществуват две главни допирателни. В този случай повърхнината  $M^2$  може да се параметризира спрямо главните ѝ линии, което е изпълнено тогава и само тогава, когато  $F = 0$  и  $M = 0$ .

Локалната теория на времеподобните повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$ , за които  $\varkappa^2 - k > 0$  във всяка точка, може да се разработи аналогично на теорията на пространственоподобните повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$  на база на съществуващата параметризация спрямо главни линии. В случая, когато  $\varkappa^2 - k < 0$ , не съществуват главни линии на повърхнината и трябва да се търси друг подход за изследване. Такъв подход е предложен в §1.4, където времеподобните повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$  се изучават спрямо изотропни параметри (локална параметризация спрямо изотропните линии).

### 1.3 Времеподобни повърхнини, състоящи се от омбилични точки

Разглеждаме времеподобна повърхнина  $M^2$  без инфлексни точки, т.е.  $(L, M, N) \neq (0, 0, 0)$ . В класическата диференциална геометрия на повърхнини, една точка  $p \in M^2$  се нарича *омбилична*, ако коефициентите на първата и втората основни форми в точката  $p$  са пропорционални, т.е.  $L = \rho E$ ;  $M = \rho F$ ;  $N = \rho G$  за някое  $\rho \in \mathbb{R}, \rho \neq 0$  или казано по друг начин рангът на матрицата

$$\begin{pmatrix} E & F & G \\ L & M & N \end{pmatrix},$$

образувана от коефициентите на първата и втората основни форми, в точката  $p$  е 1.

Една повърхнина  $M^2$  се нарича *минимална*, ако във всяка нейна точка векторът на средната кривина  $H$  е нулев вектор. Оказва се, че класът на минималните повърхнини в Евклидовото пространство  $\mathbb{R}^4$  съвпада с класа на повърхнините, състоящи се само от омбилични точки [32]. Аналогичен резултат е в сила за пространствено-подобни повърхнини в пространството на Минковски  $\mathbb{R}_1^4$  [35]. Сега ще докажем, че минималните времениподобни повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$  се характеризират със следното твърдение.

**Твърдение 1.3.1.** *Нека  $M^2$  е времениподобна повърхнина в  $\mathbb{R}_1^4$  без инфлексни точки. Тогава,  $M^2$  е минимална повърхнина тогава и само тогава, когато  $M^2$  се състои от омбилични точки.*

*Доказателство:* Без ограничение на общността считаме, че повърхнината е параметризирана спрямо ортогонални линии, т.е.  $F = 0$ . Означаваме  $x = \frac{z_u}{\sqrt{-E}}$ ,  $y = \frac{z_v}{\sqrt{G}}$ . Векторното поле на средната кривина на времениподобна повърхнина се задава с формулата

$$H = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \sigma = \frac{1}{2} (-\sigma(x, x) + \sigma(y, y)).$$

Като използваме получените по-горе формули (1.10), получаваме, че

$$-\sigma(x, x) + \sigma(y, y) = 0$$

тогава и само тогава, когато

$$\left( \frac{c_{11}^1}{E} + \frac{c_{22}^1}{G} \right) n_1 + \left( \frac{c_{11}^2}{E} + \frac{c_{22}^2}{G} \right) n_2 = 0.$$

Векторните полета  $n_1, n_2$  са база за нормалното пространство  $N_p M^2$ , т.е. са линейно независими и затова горното равенство е изпълнено, ако коефициентите пред  $n_1$  и  $n_2$  са едновременно равни на 0, т.е.

$$c_{22}^1 = -\frac{G}{E} c_{11}^1; \quad c_{22}^2 = -\frac{G}{E} c_{11}^2. \quad (1.14)$$

Тогава, като използваме (1.14), намираме, че ако  $H = 0$ , то:

$$\Delta_2 = 0; \quad \frac{\Delta_3}{G} = \frac{\Delta_1}{E}.$$

Следователно,

$$L = \rho E; \quad M = \rho F; \quad N = \rho G,$$

където  $\rho$  е функция върху  $M^2$ . Последното означава, че ако  $H = 0$ , то всички точки на  $M^2$  са омбилични.

Обратно, ако  $L = \rho E$ ;  $M = \rho F$ ;  $N = \rho G$ ,  $\rho \neq 0$ , то от условието  $F = 0$  следва, че  $M = 0$ . Следователно,

$$\Delta_2 = 0, \text{ т.е. } \begin{vmatrix} c_{11}^1 & c_{22}^1 \\ c_{11}^2 & c_{22}^2 \end{vmatrix} = 0,$$

което означава, че съществува функция  $\tilde{\rho}$  такава, че  $c_{22}^1 = \tilde{\rho}c_{11}^1$ ,  $c_{22}^2 = \tilde{\rho}c_{11}^2$ . Следователно, имаме следната връзка  $\Delta_3 = -\tilde{\rho}\Delta_1$ . Като използваме, че коефициентите на първата и втората основни форми са пропорционални, т.е. имаме  $\frac{L}{E} = \frac{N}{G}$ , получаваме, че  $\tilde{\rho} = -\frac{G}{E}$ . Следователно, равенствата (1.14) са изпълнени, откъдето следва, че  $\text{tr } \sigma = 0$ , т.е.  $H = 0$ . □

С Твърдение 1.3.1 показахме, че класът на времеподобните повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$ , състоящи се от омбилични точки, съвпада с класа на минималните времеподобни повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$ .

**Забележка 1.3.2.** Ясно е, че повърхнините, състоящи се от омбилични точки, се характеризират с условието  $\varkappa^2 - k = 0$ . Следователно, минималните времеподобни повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$  могат да се характеризират с равенството  $\varkappa^2 - k = 0$ .

## 1.4 Времеподобни повърхнини без омбилични точки

В този параграф ще разглеждаме времеподобни повърхнини без минимални (омбилични) точки в четиримерното пространство на Минковски  $\mathbb{R}_1^4$ .

В случая, когато  $\varkappa^2 - k > 0$ , можем да използваме локална параметризация спрямо главните линии и да въведем геометричен репер на повърхнината, определен от главните направления и векторното поле на средната кривина. Използвайки този геометричен репер, можем да разработим локалната теория на класа на времеподобните повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$ , за които  $\varkappa^2 - k > 0$ , по аналогия на теорията на пространственородните повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$  и да докажем фундаментална теорема (теорема за съществуване и единственост) за този клас повърхнини чрез осем геометрично определени функции, удовлетворяващи система частни диференциални уравнения. Този случай е разгледан в § 1.4.1.

### 1.4.1 Времениподобни повърхнини, параметризиращи спрямо главни линии

Нека  $M^2$  е времениподобна повърхнина без омбилични точки, параметризирана спрямо главните линии, т.е.  $F = 0$  и  $M = 0$ . Главните направления се определят от  $z_u$  и  $z_v$ . Без ограничение на общността считаме, че  $\langle z_u, z_u \rangle < 0$  и  $\langle z_v, z_v \rangle > 0$ . Разглеждаме допирателни векторни полета  $X$  и  $Y$ , колинеарни на главните направления, т.е.  $X = \frac{z_u}{\sqrt{-E}}$ ,  $Y = \frac{z_v}{\sqrt{G}}$ . От условието  $M = 0$  следва, че  $\sigma(X, X)$  и  $\sigma(Y, Y)$  са колинеарни. Нека  $N_1$  е единично векторно поле, колинеарно с  $\sigma(X, X)$  и  $\sigma(Y, Y)$ . Тогава, съществуват гладки функции  $\nu_1$  и  $\nu_2$  върху  $M^2$ , такива че

$$\begin{aligned}\sigma(X, X) &= \nu_1 N_1, \\ \sigma(Y, Y) &= \nu_2 N_2.\end{aligned}\tag{1.15}$$

Следователно, векторното поле на средната кривина  $H$  има вида:

$$H = \frac{-\nu_1 + \nu_2}{2} N_1.\tag{1.16}$$

Да отбележим, че за времениподобните повърхнини векторното поле на средната кривина е пространственоподобно, т.е.  $\langle H, H \rangle > 0$ . Единичното нормално векторно поле  $N_1$  във формули (1.15) е геометрично определено (с точност до знак) от условието, че е колинеарно на векторното поле на средната кривина. За определеност считаме, че  $N_1 = \frac{H}{\sqrt{\langle H, H \rangle}}$ . Избираме единично нормално векторно поле  $N_2$  такова, че четворката  $\{X, Y, N_1, N_2\}$  да е положително ориентирана ортонормирана база на  $\mathbb{R}_1^4$ . Тогава,  $\langle N_2, N_2 \rangle = 1$ .

Спрямо така избрания геометричен репер  $\{X, Y, N_1, N_2\}$  ще запишем деривационните формули от тип формули на Френе, които изразяват производните по  $X$  и по  $Y$  на векторните полета  $X, Y, N_1, N_2$ .

Като използваме формулите (1.3), пресмятаме производните на  $z_u$  и  $z_v$ . От  $\langle z_u, z_u \rangle = E$ , след диференциране съответно по  $u$  и  $v$ , получаваме:

$$2\langle z_{uu}, z_u \rangle = E_u.$$

От друга страна,  $\langle z_{uu}, z_u \rangle = -\Gamma_{11}^1 \langle z_u, z_u \rangle$ , откъдето намираме

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{-E_u}{2E}.$$

Аналогично,  $2\langle z_{uv}, z_u \rangle = E_v$  и от  $\langle z_{uv}, z_u \rangle = -\Gamma_{12}^1 \langle z_u, z_u \rangle$  получаваме

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{-E_v}{2E}.$$

Останалите коефициенти  $\Gamma_{12}^2, \Gamma_{22}^2, \Gamma_{11}^2, \Gamma_{22}^1$  намираме по подобен начин от  $\langle z_v, z_v \rangle = G$  и  $\langle z_u, z_v \rangle = 0$ . След пресмятане получаваме:

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G}; \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{G_v}{2G}; \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{-E_v}{2G}; \quad \Gamma_{22}^1 = \frac{G_u}{2E}.$$

Окончателно, за матрицата  $(\Gamma_{ij}^k)$ , чиито елементи са символите на Кристофел, получаваме:

$$(\Gamma_{ij}^k) = \begin{pmatrix} \frac{E_u}{2E} & \frac{-E_v}{2G} \\ \frac{E_v}{2E} & \frac{G_u}{2G} \\ \frac{-G_u}{2E} & \frac{G_v}{2G} \end{pmatrix}.$$

Пресмятаме производните по  $X$  и  $Y$  на допирателните векторни полета:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X X &= \tilde{\nabla} \frac{z_u}{\sqrt{-E}} \frac{z_u}{\sqrt{-E}} = \frac{1}{-E} \tilde{\nabla}_{z_u} z_u + \frac{1}{\sqrt{-E}} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{\sqrt{-E}} \right) z_u; \\ \tilde{\nabla}_X Y &= \tilde{\nabla} \frac{z_u}{\sqrt{-E}} \frac{z_v}{\sqrt{G}} = \frac{1}{\sqrt{-EG}} \tilde{\nabla}_{z_u} z_v + \frac{1}{\sqrt{-E}} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{\sqrt{G}} \right) z_v; \\ \tilde{\nabla}_Y X &= \tilde{\nabla} \frac{z_v}{\sqrt{G}} \frac{z_u}{\sqrt{-E}} = \frac{1}{\sqrt{-EG}} \tilde{\nabla}_{z_v} z_u + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\sqrt{-E}} \right) z_u; \\ \tilde{\nabla}_Y Y &= \tilde{\nabla} \frac{z_v}{\sqrt{G}} \frac{z_v}{\sqrt{G}} = \frac{1}{G} \tilde{\nabla}_{z_v} z_v + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\sqrt{G}} \right) z_v. \end{aligned} \tag{1.17}$$

От  $\langle X, X \rangle = -1$ ,  $\langle X, Y \rangle = 0$ ,  $\langle Y, Y \rangle = 1$  имаме следните равенства за производните:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\nabla}_X X, X \rangle &= 0, \quad \langle \tilde{\nabla}_X X, Y \rangle = -\langle \tilde{\nabla}_X Y, X \rangle, \quad \langle \tilde{\nabla}_X Y, Y \rangle = 0, \\ \langle \tilde{\nabla}_Y X, X \rangle &= 0, \quad \langle \tilde{\nabla}_Y X, Y \rangle = -\langle \tilde{\nabla}_Y Y, X \rangle, \quad \langle \tilde{\nabla}_Y Y, Y \rangle = 0. \end{aligned}$$

Означаваме

$$\gamma_1 = \langle \tilde{\nabla}_X X, Y \rangle, \quad \gamma_2 = \langle \tilde{\nabla}_Y Y, X \rangle. \tag{1.18}$$

Тогава, от (1.17) и (1.18) след пресмятане получаваме:

$$\gamma_1 = \frac{E_v}{2E\sqrt{G}}.$$

От друга страна,

$$Y(\ln \sqrt{-E}) = \frac{z_v}{\sqrt{G}}(\ln \sqrt{-E}) = \frac{E_v}{2E\sqrt{G}}.$$

Следователно, функцията  $\gamma_1$  се изразява по следния начин:

$$\gamma_1 = Y(\ln \sqrt{-E}).$$

Аналогично, за функцията  $\gamma_2$  пресмятаме:

$$\gamma_2 = \frac{-G_u}{2G\sqrt{-E}}.$$

От друга страна,

$$X(\ln \sqrt{G}) = \frac{z_u}{\sqrt{-E}}(\ln \sqrt{G}) = \frac{G_u}{2G\sqrt{-E}}.$$

Следователно, функцията  $\gamma_2$  има вида:

$$\gamma_2 = -X(\ln \sqrt{G}).$$

И така, като използваме формулите на Гаус и Вайнгартен, получаваме равенствата:

$$\begin{aligned}\nabla_X X &= \gamma_1 Y; \\ \nabla_X Y &= \gamma_1 X; \\ \nabla_Y X &= -\gamma_2 Y; \\ \nabla_Y Y &= -\gamma_2 X,\end{aligned}$$

които в матричен вид са:

$$\begin{pmatrix} \nabla_X X \\ \nabla_X Y \\ \nabla_Y X \\ \nabla_Y Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1 \\ \gamma_1 & 0 \\ 0 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

Нормалното векторно поле  $\sigma(X, Y)$  може да се запише във вида:

$$\sigma(X, Y) = \lambda N_1 + \mu N_2,$$

където  $\lambda$  и  $\mu$  са функции върху  $M^2$ . Окончателно, получаваме следните дерива-



ционни формули за допирателните векторни полета  $X$  и  $Y$ :

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_X X &= \gamma_1 Y + \nu_1 N_1; \\ \tilde{\nabla}_X Y &= \gamma_1 X + \lambda N_1 + \mu N_2; \\ \tilde{\nabla}_Y X &= -\gamma_2 Y + \lambda N_1 + \mu N_2; \\ \tilde{\nabla}_Y Y &= -\gamma_2 X + \nu_2 N_2,\end{aligned}$$

които в матричен вид се записват по следния начин:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\nabla}_X X \\ \tilde{\nabla}_X Y \\ \tilde{\nabla}_Y X \\ \tilde{\nabla}_Y Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1 & \nu_1 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & \lambda & \mu \\ 0 & -\gamma_2 & \lambda & \mu \\ -\gamma_2 & 0 & \nu_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}.$$

Функциите  $\nu_1, \nu_2, \lambda, \mu$  се определят чрез равенствата:

$$\nu_1 = \langle \tilde{\nabla}_X X, N_1 \rangle, \quad \lambda = \langle \tilde{\nabla}_X Y, N_1 \rangle, \quad \mu = \langle \tilde{\nabla}_X Y, N_2 \rangle, \quad \nu_2 = \langle \tilde{\nabla}_Y Y, N_1 \rangle. \quad (1.19)$$

За пресмятането на производните по  $X$  и по  $Y$  на нормалните векторни полета  $N_1$  и  $N_2$  използваме следните равенства:

$$\langle \tilde{\nabla}_X N_1, N_1 \rangle = 0, \quad \langle \tilde{\nabla}_Y N_1, N_1 \rangle = 0, \quad \langle \tilde{\nabla}_X N_2, N_2 \rangle = 0, \quad \langle \tilde{\nabla}_Y N_2, N_2 \rangle = 0$$

и получаваме:

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\nabla}_X N_1, N_2 \rangle &= -\langle \tilde{\nabla}_X N_2, N_1 \rangle, \\ \langle \tilde{\nabla}_Y N_1, N_2 \rangle &= -\langle \tilde{\nabla}_Y N_2, N_1 \rangle, \\ \langle \tilde{\nabla}_X N_1, X \rangle &= -\langle \tilde{\nabla}_X X, N_1 \rangle = -\nu_1, \\ \langle \tilde{\nabla}_Y N_1, X \rangle &= -\langle \tilde{\nabla}_Y X, N_1 \rangle = -\lambda, \\ \langle \tilde{\nabla}_X N_2, X \rangle &= -\langle \tilde{\nabla}_X X, N_2 \rangle = 0, \\ \langle \tilde{\nabla}_Y N_2, X \rangle &= -\langle \tilde{\nabla}_Y X, N_2 \rangle = -\mu, \\ \langle \tilde{\nabla}_X N_1, Y \rangle &= -\langle \tilde{\nabla}_X Y, N_1 \rangle = -\lambda, \\ \langle \tilde{\nabla}_Y N_1, Y \rangle &= -\langle \tilde{\nabla}_Y Y, N_1 \rangle = -\nu_2, \\ \langle \tilde{\nabla}_X N_2, Y \rangle &= -\langle \tilde{\nabla}_X Y, N_2 \rangle = -\mu, \\ \langle \tilde{\nabla}_Y N_2, Y \rangle &= -\langle \tilde{\nabla}_Y Y, N_2 \rangle = 0.\end{aligned} \quad (1.20)$$

Дефинираме функциите  $\beta_1$  и  $\beta_2$  по следния начин:

$$\beta_1 = \langle \tilde{\nabla}_X N_1, N_2 \rangle, \quad \beta_2 = \langle \tilde{\nabla}_Y N_1, N_2 \rangle.$$

Като използваме (1.19) и (1.20), получаваме деривационни формули за нормалните векторни полета  $N_1$  и  $N_2$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X N_1 &= \nu_1 X - \lambda Y + \beta_1 N_2; \\ \tilde{\nabla}_Y N_1 &= \lambda X - \nu_2 Y + \beta_2 N_2; \\ \tilde{\nabla}_X N_2 &= -\mu Y - \beta_1 N_1; \\ \tilde{\nabla}_Y N_2 &= \mu X - \beta_2 N_1, \end{aligned}$$

които могат да се запишат в матричен вид по следния начин:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\nabla}_X N_1 \\ \tilde{\nabla}_Y N_1 \\ \tilde{\nabla}_X N_2 \\ \tilde{\nabla}_Y N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_1 & -\lambda & 0 & \beta_1 \\ \lambda & -\nu_2 & 0 & \beta_2 \\ 0 & -\mu & -\beta_1 & 0 \\ \mu & 0 & -\beta_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}.$$

Следователно, за времениподобните повърхнини без омбилични точки, параметризирани спрямо главните направления, са в сила следните деривационни формули от тип формули на Френе, които изразяват производните по  $X$  и  $Y$  на геометричния репер  $\{X, Y, N_1, N_2\}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X X &= \gamma_1 Y + \nu_1 N_1; & \tilde{\nabla}_X N_1 &= \nu_1 X - \lambda Y + \beta_1 N_2; \\ \tilde{\nabla}_X Y &= \gamma_1 X + \lambda N_1 + \mu N_2; & \tilde{\nabla}_Y N_1 &= \lambda X - \nu_2 Y + \beta_2 N_2; \\ \tilde{\nabla}_Y X &= -\gamma_2 Y + \lambda N_1 + \mu N_2; & \tilde{\nabla}_X N_2 &= -\mu Y - \beta_1 N_1; \\ \tilde{\nabla}_Y Y &= -\gamma_2 X + \nu_2 N_1; & \tilde{\nabla}_Y N_2 &= \mu X - \beta_2 N_1. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Да отбележим, че функциите  $\gamma_1, \gamma_2, \lambda, \mu, \nu_1, \nu_2, \beta_1, \beta_2$ , участващи в горните формули, се определят от геометричния репер  $\{X, Y, N_1, N_2\}$  чрез равенствата:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= Y(\ln \sqrt{-E}), \quad \gamma_2 = -X(\ln \sqrt{G}), \quad \nu_1 = \langle \tilde{\nabla}_X X, N_1 \rangle, \quad \nu_2 = \langle \tilde{\nabla}_Y Y, N_1 \rangle, \\ \lambda &= \langle \tilde{\nabla}_X Y, N_1 \rangle, \quad \mu = \langle \tilde{\nabla}_X Y, N_2 \rangle, \quad \beta_1 = \langle \tilde{\nabla}_X N_1, N_2 \rangle, \quad \beta_2 = \langle \tilde{\nabla}_Y N_1, N_2 \rangle. \end{aligned}$$

Векторното поле на средната кривина  $H$  се изразява чрез функциите  $\nu_1$  и  $\nu_2$  по формулата (1.16), откъдето следва, че времениподобните повърхнини без омбилични

точки, параметризиращи спрямо главните линии, които имат постоянна средна кривина, се характеризират с условието  $\nu_1 - \nu_2 = \text{const} = c$ ,  $c \neq 0$ . Полученият резултат можем да формулираме в следното твърдение.

**Твърдение 1.4.1.** *Нека  $M^2$  е времеподобна повърхнина в  $\mathbb{R}_1^4$  без омбилични точки, параметризирана спрямо главните линии. Тогава,  $M^2$  е с постоянна ненулева средна кривина тогава и само тогава, когато  $\nu_1 - \nu_2 = \text{const} = c$ ,  $c \neq 0$ .*

Като използваме формулите (1.21) и (1.1), след пресмятане получаваме, че Гаусовата кривина  $K$  се изразява чрез геометричните функции  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu_1$  и  $\nu_2$  по следния начин:

$$K = \lambda^2 + \mu^2 - \nu_1\nu_2. \quad (1.22)$$

Аналогично, от формулите (1.21) и (1.2), получаваме, че кривината на нормалната свързаност  $\varkappa$  се изразява чрез функциите  $\mu$ ,  $\nu_1$  и  $\nu_2$  по следната формула:

$$\varkappa = (\nu_1 + \nu_2)\mu. \quad (1.23)$$

Функцията  $k = \det \gamma$ , определена от изображението на Вайнгартен, има вида:

$$k = -4\nu_1\nu_2\mu^2. \quad (1.24)$$

*Забележка:*  $\mu \neq 0$ , тъй като разглеждаме повърхнини без инфлексни точки.

Можем да формулираме следните твърдения, които следват непосредствено от получените формули (1.22), (1.23) и (1.24).

**Твърдение 1.4.2.** *Нека  $M^2$  е времеподобна повърхнина в  $\mathbb{R}_1^4$  без омбилични точки, параметризирана спрямо главните линии. Тогава,  $M^2$  е плоска ( $K = 0$ ), тогава и само тогава, когато  $\nu_1\nu_2 = \lambda^2 + \mu^2$ .*

**Твърдение 1.4.3.** *Нека  $M^2$  е времеподобна повърхнина в  $\mathbb{R}_1^4$  без омбилични точки, параметризирана спрямо главните линии. Тогава,  $M^2$  е с постоянна ненулева Гаусова кривина ( $K = \text{const} \neq 0$ ), тогава и само тогава, когато  $\lambda^2 + \mu^2 - \nu_1\nu_2 = \text{const} = c$ ,  $c \neq 0$ .*

**Твърдение 1.4.4.** *Нека  $M^2$  е времеподобна повърхнина в  $\mathbb{R}_1^4$  без омбилични точки, параметризирана спрямо главните линии. Тогава,  $M^2$  е с плоска нормална свързаност ( $\varkappa = 0$ ), тогава и само тогава, когато  $\nu_1 + \nu_2 = 0$ .*

**Твърдение 1.4.5.** *Нека  $M^2$  е времеподобна повърхнина в  $\mathbb{R}_1^4$  без омбилични точки, параметризирана спрямо главните линии. Тогава,  $M^2$  е с постоянна ненулева нормална кривина ( $\varkappa = \text{const} \neq 0$ ), тогава и само тогава, когато  $(\nu_1 + \nu_2)\mu = \text{const} = c$ ,  $c \neq 0$ .*

С помощта на функциите  $\gamma_1, \gamma_2, \lambda, \mu, \nu_1, \nu_2, \beta_1, \beta_2$  ще докажем фундаментална теорема (теорема за съществуване и единственост) за клас на времениподобните повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$ , които допускат параметризация спрямо главни линии. В общия случай, за подмногообразия на псевдо-Евклидови многообразия, е доказана фундаментална теорема за съществуване и единственост в общ вид на езика на тензорни полета и свързаности (вж. [19], Теорема 2.4 и Теорема 2.5). В [35] е представен специален случай на общата теорема за съществуване и единственост като е формулирана и доказана фундаментална теорема на езика на геометрични функции за класа на пространственоподобните повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$ , за които векторът на средната кривина е ненулев пространственоподобен или времениподобен вектор във всяка точка. В тази теорема се използва параметризация на повърхнините спрямо главните линии. Фундаментална теорема за повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$  с изотропно векторно поле на средната кривина (т. нар. marginally trapped повърхнини) е доказана на езика на геометрични функции в [37]. Тези теореми са специален случай на общата фундаментална теорема, но формулирани на езика на геометрични функции, те са по-удобни за приложения.

Да разгледаме отново формулите (1.21). Като използваме, че линейната свързаност на Леви-Чевита  $\tilde{\nabla}$  е плоска, т.е.  $\tilde{R}(X, Y, X) = 0$ ,  $\tilde{R}(X, Y, Y) = 0$ ,  $\tilde{R}(X, Y, N_1) = 0$ ,  $\tilde{R}(X, Y, N_2) = 0$  и формули (1.21), получаваме следните условия за интегрируемост на повърхнината:

$$X(\gamma_2) + Y(\gamma_1) = -\gamma_1^2 + \gamma_2^2 - \lambda^2 - \mu^2 + \nu_1\nu_2$$

$$X(\lambda) - Y(\nu_1) = \gamma_1(\nu_1 + \nu_2) + 2\lambda\gamma_2 + \mu\beta_1$$

$$X(\mu) = \nu_1\beta_2 + 2\mu\gamma_2 - \beta_1\lambda$$

$$Y(\mu) = \nu_2\beta_1 - 2\mu\gamma_1 - \beta_2\lambda$$

$$X(\nu_2) - Y(\lambda) = 2\lambda\gamma_1 + (\nu_1 + \nu_2)\gamma_2 - \mu\beta_2$$

$$X(\beta_2) - Y(\beta_1) = \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \mu(\nu_1 + \nu_2).$$

От това, че  $X = \frac{1}{\sqrt{-E}}$  и  $Y = \frac{1}{\sqrt{G}}$ , можем да запишем условията за интегрируемост

ВЪВ ВИДА:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{-E}}(\gamma_2)_u + \frac{1}{\sqrt{G}}(\gamma_1)_v &= -\gamma_1^2 + \gamma_2^2 - \lambda^2 - \mu^2 + \nu_1\nu_2 \\
 \frac{1}{\sqrt{-E}}(\lambda)_u - \frac{1}{\sqrt{G}}(\nu_1)_v &= \gamma_1(\nu_1 + \nu_2) + 2\lambda\gamma_2 + \mu\beta_1 \\
 \frac{1}{\sqrt{-E}}(\mu)_u &= \nu_1\beta_2 + 2\mu\gamma_2 - \beta_1\lambda \\
 \frac{1}{\sqrt{G}}(\mu)_v &= \nu_2\beta_1 - 2\mu\gamma_1 - \beta_2\lambda \\
 \frac{1}{\sqrt{-E}}(\nu_2)_u - \frac{1}{\sqrt{G}}(\lambda)_v &= 2\lambda\gamma_1 + (\nu_1 + \nu_2)\gamma_2 - \mu\beta_2 \\
 \frac{1}{\sqrt{-E}}(\beta_2)_u - \frac{1}{\sqrt{G}}(\beta_1)_v &= \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \mu(\nu_1 + \nu_2).
 \end{aligned}$$

От третото и четвъртото уравнения, е ясно, че  $(\mu)_u(\mu)_v \neq 0$ , тогава и само тогава, когато е изпълнено условието  $(\nu_1\beta_2 + 2\mu\gamma_2 - \beta_1\lambda)(\nu_2\beta_1 - 2\mu\gamma_1 - \beta_2\lambda) \neq 0$ . В този случай, можем да изразим функциите  $\sqrt{-E}$  и  $\sqrt{G}$  по следния начин:

$$\sqrt{-E} = \frac{(\mu)_u}{\nu_1\beta_2 + 2\mu\gamma_2 - \beta_1\lambda}, \quad \sqrt{G} = \frac{(\mu)_v}{\nu_2\beta_1 - 2\mu\gamma_1 - \beta_2\lambda}.$$

Ще докажем следната фундаментална теорема за времеподобни повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$ , които допускат параметризация спрямо главни линии:

**Теорема 1.4.6.** *Нека  $\gamma_1, \gamma_2, \nu_1, \nu_2, \lambda, \mu, \beta_1, \beta_2$  са гладки функции, дефинирани в област  $\mathcal{D}, \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ , и удовлетворяващи условията*

$$\begin{aligned}
 \frac{(\mu)_u}{\nu_1\beta_2 + 2\mu\gamma_2 - \beta_1\lambda} &> 0 \\
 \frac{(\mu)_v}{\nu_2\beta_1 - 2\mu\gamma_1 - \beta_2\lambda} &> 0 \\
 (\sqrt{-E})_v &= \gamma_1\sqrt{-E}\sqrt{G} \\
 (\sqrt{G})_u &= -\gamma_2\sqrt{-E}\sqrt{G} \\
 \frac{1}{\sqrt{-E}}(\gamma_2)_u + \frac{1}{\sqrt{G}}(\gamma_1)_v &= -\gamma_1^2 + \gamma_2^2 - \lambda^2 - \mu^2 + \nu_1\nu_2 \\
 \frac{1}{\sqrt{-E}}(\lambda)_u - \frac{1}{\sqrt{G}}(\nu_1)_v &= \gamma_1(\nu_1 + \nu_2) + 2\lambda\gamma_2 + \mu\beta_1 \\
 \frac{1}{\sqrt{-E}}(\nu_2)_u - \frac{1}{\sqrt{G}}(\lambda)_v &= 2\lambda\gamma_1 + (\nu_1 + \nu_2)\gamma_2 - \mu\beta_2 \\
 \frac{1}{\sqrt{-E}}(\beta_2)_u - \frac{1}{\sqrt{G}}(\beta_1)_v &= \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \mu(\nu_1 + \nu_2),
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

където  $\sqrt{-E} = \frac{(\mu)_u}{\nu_1\beta_2 + 2\mu\gamma_2 - \beta_1\lambda}$ ,  $\sqrt{G} = \frac{(\mu)_v}{\nu_2\beta_1 - 2\mu\gamma_1 - \beta_2\lambda}$ . Нека  $\{X_0, Y_0, (N_1)_0, (N_2)_0\}$  е ортонормиран репер в точка  $p_0 \in \mathbb{R}_1^4$ . Тогава, съществува подобласт  $\mathcal{D}_0$ ,  $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$  и единствена времениподобна повърхнина  $M^2 : z = z(u, v)$ ,  $(u, v) \in \mathcal{D}_0$ , минаваща през  $p_0$ , такава, че  $\{X_0, Y_0, (N_1)_0, (N_2)_0\}$  е геометричният репер на  $M^2$  в точка  $p_0$ , а  $\gamma_1, \gamma_2, \nu_1, \nu_2, \lambda, \mu, \beta_1, \beta_2$  са геометричните функции на повърхнината.

*Доказателство.* Да разгледаме следната система от частни диференциални уравнения за

неизвестните векторни функции  $X = X(u, v)$ ,  $Y = Y(u, v)$ ,  $N_1 = N_1(u, v)$ ,  $N_2 = N_2(u, v)$  в  $\mathbb{R}_1^4$ :

$$\begin{aligned} X_u &= \sqrt{-E}(\gamma_1 Y + \nu_1 N_1) & X_v &= \sqrt{G}(-\gamma_2 Y + \lambda N_1 + \mu N_2) \\ Y_u &= \sqrt{-E}(\gamma_1 X + \lambda N_1 + \mu N_2) & Y_v &= \sqrt{G}(-\gamma_2 X + \nu_2 N_1) \\ (N_1)_u &= \sqrt{-E}(\nu_1 X - \lambda Y + \beta_1 N_2) & (N_1)_v &= \sqrt{G}(\lambda X - \nu_2 Y + \beta_2 N_2) \\ (N_2)_u &= \sqrt{-E}(-\mu Y - \beta_1 N_1) & (N_2)_v &= \sqrt{G}(\mu X - \beta_2 N_1). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Нека

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{A} = \sqrt{-E} \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1 & \nu_1 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & \lambda & \mu \\ \nu_1 & -\lambda & 0 & \beta_1 \\ 0 & -\mu & -\beta_1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{B} = \sqrt{G} \begin{pmatrix} 0 & -\gamma_2 & \lambda & \mu \\ -\gamma_2 & 0 & \nu_2 & 0 \\ \lambda & -\nu_2 & 0 & \beta_2 \\ \mu & 0 & -\beta_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Като използваме горните означения, можем да запишем в матричен вид системата (1.26) по следния начин:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_u &= \mathcal{A}\mathcal{W}, \\ \mathcal{W}_v &= \mathcal{B}\mathcal{W}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

За системата (1.27) имаме следните условия за интегрируемост:  $\mathcal{W}_{uv} = \mathcal{W}_{vu}$ , т.е.

$$\frac{\partial a_i^k}{\partial v} - \frac{\partial b_i^k}{\partial u} + \sum_{j=1}^4 (a_i^j b_j^k - b_i^j a_j^k) = 0, \quad i, k = 1, \dots, 4, \quad (1.28)$$

където  $a_i^j$  и  $b_i^j$  ( $i, j = 1, \dots, 4$ ) са съответно елементите на матриците  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ . Чрез използване на условията (1.25), проверяваме, че равенствата (1.28) са изпълнени. Следователно, съществува подобласт  $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}$  и единствени векторни функции  $X = X(u, v)$ ,  $Y = Y(u, v)$ ,  $N_1 = N_1(u, v)$ ,  $N_2 = N_2(u, v)$ ,  $(u, v) \in \mathcal{D}_1$ , удовлетворяващи

системата (1.26) и началните условия

$$X(u_0, v_0) = X_0, \quad Y(u_0, v_0) = Y_0, \quad N_1(u_0, v_0) = (N_1)_0, \quad N_2(u_0, v_0) = (N_2)_0.$$

Разглеждаме следните функции:

$$\begin{aligned} h_1 &= \langle X, X \rangle + 1; & h_5 &= \langle X, Y \rangle; & h_8 &= \langle Y, N_1 \rangle; \\ h_2 &= \langle Y, Y \rangle - 1; & h_6 &= \langle X, N_1 \rangle; & h_9 &= \langle Y, N_2 \rangle; \\ h_3 &= \langle N_1, N_1 \rangle - 1; & h_7 &= \langle X, N_2 \rangle; & h_{10} &= \langle N_1, N_2 \rangle; \\ h_4 &= \langle N_2, N_2 \rangle - 1; \end{aligned}$$

дефинирани за  $(u, v) \in \mathcal{D}_1$ . Чрез тези функции ще докажем, че векторните функции  $X(u, v)$ ,  $Y(u, v)$ ,  $N_1(u, v)$ ,  $N_2(u, v)$  образуват ортонормиран репер в  $\mathbb{R}_1^4$  за всяко  $(u, v) \in \mathcal{D}_1$ . От това, че  $X(u, v)$ ,  $Y(u, v)$ ,  $N_1(u, v)$ ,  $N_2(u, v)$  удовлетворяват условията (1.26), получаваме системата

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_i}{\partial u} &= k_i^j h_j, \\ \frac{\partial h_i}{\partial v} &= m_i^j h_j; \end{aligned} \quad i = 1, \dots, 10, \quad (1.29)$$

където  $k_i^j, m_i^j$ ,  $i, j = 1, \dots, 10$  са функции на  $(u, v) \in \mathcal{D}_1$ . Системата (1.29) е линейна система частни диференциални уравнения за функциите  $h_i(u, v)$ , удовлетворяващи условията  $h_i(u_0, v_0) = 0$  за всяко  $i = 1, \dots, 10$ , понеже  $\{X_0, Y_0, (N_1)_0, (N_2)_0\}$  е ортонормиран репер. Следователно,  $h_i(u, v) = 0$ ,  $i = 1, \dots, 10$  за всяко  $(u, v) \in \mathcal{D}_1$ , откъдето следва, че векторните функции  $X(u, v)$ ,  $Y(u, v)$ ,  $N_1(u, v)$ ,  $N_2(u, v)$  образуват ортонормиран репер в  $\mathbb{R}_1^4$  за всяко  $(u, v) \in \mathcal{D}_1$ .

Сега разглеждаме следната система от частни диференциални уравнения за векторната функция  $z(u, v)$ :

$$\begin{aligned} z_u &= \sqrt{-E} X \\ z_v &= \sqrt{G} Y. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Проверяваме, че са изпълнени условията за интегрируемост на системата (1.30), които са  $z_{uv} = z_{vu}$ , като използваме равенствата в (1.25) и (1.26). И така, съществува подобласт  $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_1$  и единствена векторна функция  $z = z(u, v)$ ,  $(u, v) \in \mathcal{D}_0$ , която удовлетворява началното условие  $z(u_0, v_0) = p_0$ .

Накрая, разглеждаме повърхнината  $M^2 : z = z(u, v)$ ,  $(u, v) \in \mathcal{D}_0$ . От това, че  $\langle z_u, z_u \rangle = E$ ,  $E < 0$ ,  $\langle z_v, z_v \rangle = G$ ,  $G > 0$ ,  $\langle z_u, z_v \rangle = 0$ , следва, че  $M^2$  е времеподобна повърхнина в  $\mathbb{R}_1^4$ . Ясно е, че повърхнината  $M^2$  е параметризирана спрямо главните линии и функциите  $\gamma_1, \gamma_2, \nu_1, \nu_2, \lambda, \mu, \beta_1, \beta_2$  са геометричните функции на повърх-

нината. □

Горната теорема е аналог на теоремата за пространственоподобните повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$ , доказана в [35].

### 1.4.2 Времениподобни повърхнини, параметризирани спрямо изотропни линии

В случая, когато  $\kappa^2 - k < 0$ , не съществуват главни линии и подходът от предишния параграф не може да се приложи. Но можем да използваме, че във всяка точка на времениподобна повърхнина в  $\mathbb{R}_1^4$  съществуват две изотропни линии и да изучаваме тези повърхнини спрямо изотропни параметри. Този подход може да се приложи, както за класа  $\kappa^2 - k > 0$ , така и за класа  $\kappa^2 - k < 0$ . В настоящия параграф ще използваме параметризация спрямо изотропни параметри и ще въведем геометричен репер на повърхнината, определен от изотропните направления.

Нека  $M^2$  е времениподобна повърхнина в  $\mathbb{R}_1^4$  без омбилични точки и  $\kappa^2 - k \neq 0$  във всяка точка от повърхнината. Известно е, че за времениподобна повърхнина в  $\mathbb{R}_1^4$  локално съществува координатна система  $(u, v)$  такава, че метричният тензор  $g$  на  $M^2$  има следния вид [49]:

$$g = -f^2(u, v)(du \otimes dv + dv \otimes du),$$

където  $f(u, v)$  е положителна функция. Нека  $z = z(u, v)$ ,  $(u, v) \in \mathcal{D}$  е такава локална параметризация на  $M^2$ . Спрямо нея коефициентите на първата основна форма са

$$E = \langle z_u, z_u \rangle = 0; \quad F = \langle z_u, z_v \rangle = -f^2(u, v); \quad G = \langle z_v, z_v \rangle = 0,$$

което означава, че допирателните векторни полета са светлинноподобни (изотропни). Параметрите  $(u, v)$  се наричат изотропни параметри на повърхнината, а направленията, определени от  $z_u$  и  $z_v$  – изотропни направления.

Разглеждаме псевдо-ортонормирана база на допирателното пространство на  $M^2$ , дефинирана чрез  $x = \frac{z_u}{f}$ ,  $y = \frac{z_v}{f}$ . Очевидно,  $\langle x, x \rangle = 0$ ,  $\langle x, y \rangle = -1$ ,  $\langle y, y \rangle = 0$ . Следователно, векторното поле на средната кривина  $H$  се задава чрез формулата:

$$H = -\sigma(x, y).$$

Тъй като разглеждаме повърхнини без минимални точки, т.е.  $H \neq 0$  във всяка точка, то можем да изберем единично нормално векторно поле  $n_1$ , колинеарно с  $H$ , т.е.  $H = \nu n_1$  за някаква гладка функция  $\nu = \|H\|$ . Тогава,  $\sigma(x, y) = -\nu n_1$ . Разглеждаме единично нормално векторно поле  $n_2$  такава, че  $\{n_1, n_2\}$  е ортонормирана база



в нормалното пространство ( $n_2$  е определен с точност до ориентация). Следователно, можем да запишем следните формули за втория фундаментален тензор  $\sigma$ :

$$\begin{aligned}\sigma(x, x) &= \lambda_1 n_1 + \mu_1 n_2; \\ \sigma(x, y) &= -\nu n_1; \\ \sigma(y, y) &= \lambda_2 n_1 + \mu_2 n_2,\end{aligned}\tag{1.31}$$

където  $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$  са гладки функции, дефинирани чрез:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \langle \tilde{\nabla}_x x, n_1 \rangle; & \mu_1 &= \langle \tilde{\nabla}_x x, n_2 \rangle; \\ \lambda_2 &= \langle \tilde{\nabla}_y y, n_1 \rangle; & \mu_2 &= \langle \tilde{\nabla}_y y, n_2 \rangle.\end{aligned}$$

Като използваме, че  $\langle z_u, z_u \rangle = 0$ ,  $\langle z_u, z_v \rangle = -f^2(u, v)$ ,  $\langle z_v, z_v \rangle = 0$ , след диференциране получаваме, че коефициентите на Кристофел имат следния вид:

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{2f_u}{f}; & \Gamma_{11}^2 &= 0; \\ \Gamma_{12}^1 &= 0; & \Gamma_{12}^2 &= 0; \\ \Gamma_{22}^1 &= 0; & \Gamma_{22}^2 &= \frac{2f_v}{f}.\end{aligned}\tag{1.32}$$

Следователно, като се има предвид, че  $x = \frac{z_u}{f}$ ,  $y = \frac{z_v}{f}$  от равенствата (1.3) и (1.32) получаваме

$$\begin{aligned}\nabla_x x &= \frac{f_u}{f^2} x; \\ \nabla_x y &= -\frac{f_u}{f^2} y; \\ \nabla_y x &= -\frac{f_v}{f^2} x; \\ \nabla_y y &= \frac{f_v}{f^2} y.\end{aligned}\tag{1.33}$$

Означаваме  $\gamma_1 = \frac{f_u}{f^2} = x(\ln f)$  и  $\gamma_2 = \frac{f_v}{f^2} = y(\ln f)$ . Тогава, от (1.31) и (1.33) получа-

ваме следните деривационни формули:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\nabla}_x x &= \gamma_1 x & + \lambda_1 n_1 + \mu_1 n_2; \\
 \tilde{\nabla}_x y &= & -\gamma_1 y - \nu n_1; \\
 \tilde{\nabla}_y x &= -\gamma_2 x & - \nu n_1; \\
 \tilde{\nabla}_y y &= & \gamma_2 y + \lambda_2 n_1 + \mu_2 n_2.
 \end{aligned} \tag{1.34}$$

За нормалните векторни полета  $n_1$  и  $n_2$  като използваме (1.34), можем да изведем следните формули:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\nabla}_x n_1 &= -\nu x + \lambda_1 y & + \beta_1 n_2; \\
 \tilde{\nabla}_y n_1 &= \lambda_2 x - \nu y & + \beta_2 n_2; \\
 \tilde{\nabla}_x n_2 &= & + \mu_1 y - \beta_1 n_1; \\
 \tilde{\nabla}_y n_2 &= \mu_2 x & - \beta_2 n_1,
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

където  $\beta_1$  и  $\beta_2$  са гладки функции, дефинирани чрез:

$$\beta_1 = \langle \tilde{\nabla}_x n_1, n_2 \rangle; \quad \beta_2 = \langle \tilde{\nabla}_y n_1, n_2 \rangle.$$

**Забележка 1.4.7.** Псевдо-ортонормираният репер  $\{x, y, n_1, n_2\}$  е геометрично определен:  $x, y$  са двете изотропни направления в допирателното пространство (определени с точност до означение);  $n_1$  е единично векторно поле, колинеарно с векторното поле на средната кривина  $H$  и еднопосочно с  $H$ ;  $n_2$  е определено от условието, че  $\{n_1, n_2\}$  е ортонормирана база в нормалното пространство ( $n_2$  е определено с точност до знак). Този псевдо-ортонормиран репер  $\{x, y, n_1, n_2\}$  наричаме *геометричен псевдо-ортонормиран репер* на повърхнината.

Формули (1.34) и (1.35) са деривационните формули на повърхнината спрямо геометричния репер  $\{x, y, n_1, n_2\}$ .

Векторното поле на средната кривина  $H$  се изразява чрез функцията  $\nu$  по следния начин

$$H = \nu n_1, \tag{1.36}$$

откъдето следва, че времениподобните повърхнини (без омбилични точки) с постоянна средна кривина се характеризират с условието  $\nu = \text{const} = c$ ,  $c \neq 0$ . Полученият резултат можем да формулираме в следното твърдение.

**Твърдение 1.4.8.** Нека  $M^2$  е времениподобна повърхнина в  $\mathbb{R}_1^4$  без омбилични точки, параметризирана спрямо изотропните линии. Тогава,  $M^2$  е с постоянна ненулева

средна кривина тогава и само тогава, когато  $\nu = \text{const} = c$ ,  $c \neq 0$ .

Като използваме формула (1.1), след пресмятане, изразяваме Гаусовата кривина  $K$  чрез геометричните функции  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$  и  $\nu$  по следния начин:

$$K = \nu^2 - (\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2). \quad (1.37)$$

Можем да формулираме следните твърдения, които следват непосредствено от (1.37).

**Твърдение 1.4.9.** Нека  $M^2$  е времеподобна повърхнина в  $\mathbb{R}_1^4$  без омбилични точки, параметризирана спрямо изотропните линии. Тогава,  $M^2$  е плоска ( $K = 0$ ), тогава и само тогава, когато  $\nu^2 = \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2$ .

**Твърдение 1.4.10.** Нека  $M^2$  е времеподобна повърхнина в  $\mathbb{R}_1^4$  без омбилични точки, параметризирана спрямо изотропните линии. Тогава,  $M^2$  е с постоянна ненулева Гаусова кривина ( $K = \text{const} \neq 0$ ), тогава и само тогава, когато  $\nu^2 - (\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2) = \text{const} = c$ ,  $c \neq 0$ .

Геометричният смисъл на функциите  $\beta_1$  и  $\beta_2$  се дава в следващите две твърдения.

**Твърдение 1.4.11.** Нека  $M^2$  е времеподобна повърхнина в  $\mathbb{R}_1^4$  без омбилични точки, параметризирана спрямо изотропните линии. Тогава,  $M^2$  има паралелно векторно поле на средната кривина тогава и само тогава, когато  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  и  $\nu = \text{const}$ .

*Доказателство.* Нека  $M^2$  е времеподобна повърхнина в  $\mathbb{R}_1^4$  с геометричен репер  $\{x, y, n_1, n_2\}$ . Като използваме (1.36), получаваме следните формули:

$$D_x H = x(\nu)n_1 + \nu\beta_1 n_2;$$

$$D_y H = y(\nu)n_1 + \nu\beta_2 n_2,$$

които показват, че векторното поле на средната кривина  $H$  е паралелно ( $D_x H = 0$ ,  $D_y H = 0$ ) тогава и само тогава, когато  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  и  $\nu = \text{const}$ .  $\square$

**Твърдение 1.4.12.** Нека  $M^2$  е времеподобна повърхнина в  $\mathbb{R}_1^4$  без омбилични точки, параметризирана спрямо изотропните линии. Тогава,  $M^2$  има паралелно нормирано векторно поле на средната кривина тогава и само тогава, когато  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  и  $\nu \neq \text{const}$ .

*Доказателство.* Да припомним, че една повърхнина  $M^2$  е повърхнина с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина, ако  $H$  е ненулев (и непаралелен) и

съществува единично векторно поле по направление на  $H$ , което е паралелно. Понеже  $n_1$  е колинеарен с  $H$  и

$$D_x n_1 = \beta_1 n_2;$$

$$D_y n_1 = \beta_2 n_2,$$

можем да заключим, че  $M^2$  е повърхнина с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина тогава и само тогава, когато  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  и  $\nu \neq \text{const}$ .  $\square$

### 1.4.3 Фундаментални теореми за времениподобни повърхнини от общ тип

В този параграф ще разглеждаме времениподобни повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$ , за които е в сила  $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$ . Такива повърхнини ще наричаме от *общ тип*.

Нека  $M^2 : z = z(u, v), (u, v) \in \mathcal{D}, \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  е локална параметризация спрямо изотропни параметри на времениподобна повърхнина от общ тип в  $\mathbb{R}_1^4$ . Разглеждаме геометричния псевдо-ортонормиран репер, въведен в §1.4.2.

Тъй като свързаността на Леви Чевита  $\tilde{\nabla}$  за  $\mathbb{R}_1^4$  е плоска, то имаме

$$\tilde{R}(x, y, x) = 0; \quad \tilde{R}(x, y, y) = 0; \quad \tilde{R}(x, y, n_1) = 0; \quad \tilde{R}(x, y, n_2) = 0, \quad (1.38)$$

където

$$\tilde{R}(x, y, z) = \tilde{\nabla}_x \tilde{\nabla}_y z - \tilde{\nabla}_y \tilde{\nabla}_x z - \tilde{\nabla}_{[x, y]} z$$

за произволни векторни полета  $x, y, z$ . Като използваме (1.38) и деривационните формули (1.34) и (1.35), получаваме следните равенства, които наричаме *условия за интегруемост* на повърхнината:

$$x(\lambda_2) + y(\nu) + 2\gamma_1 \lambda_2 - \mu_2 \beta_1 = 0; \quad (1.39)$$

$$x(\nu) + y(\lambda_1) + 2\gamma_2 \lambda_1 - \mu_1 \beta_2 = 0; \quad (1.40)$$

$$x(\mu_2) + 2\gamma_1 \mu_2 + \nu \beta_2 + \lambda_2 \beta_1 = 0; \quad (1.41)$$

$$y(\mu_1) + 2\gamma_2 \mu_1 + \nu \beta_1 + \lambda_1 \beta_2 = 0; \quad (1.42)$$

$$x(\gamma_2) + y(\gamma_1) + 2\gamma_1 \gamma_2 - \nu^2 + \lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 = 0; \quad (1.43)$$

$$x(\beta_2) - y(\beta_1) + \mu_1 \lambda_2 - \lambda_1 \mu_2 + \gamma_1 \beta_2 - \gamma_2 \beta_1 = 0. \quad (1.44)$$

С помощта на равенството (1.44) получаваме, че кривината на нормалната свързаност  $\varkappa$  се изразява чрез функциите  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1$  и  $\mu_2$  със следната формула:

$$\varkappa = \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1. \quad (1.45)$$

Можем да формулираме следните твърдения, които следват непосредствено от (1.45).

**Твърдение 1.4.13.** *Нека  $M^2$  е времеподобна повърхнина в  $\mathbb{R}_1^4$  без омбилични точки, параметризирана спрямо изотропните линии. Тогава,  $M^2$  е с плоска нормална свързаност ( $\varkappa = 0$ ), тогава и само тогава, когато  $\lambda_1\mu_2 = \lambda_2\mu_1$ .*

**Твърдение 1.4.14.** *Нека  $M^2$  е времеподобна повърхнина в  $\mathbb{R}_1^4$  без омбилични точки, параметризирана спрямо изотропните линии. Тогава,  $M^2$  е с постоянна ненулева нормална кривина ( $\varkappa = \text{const} \neq 0$ ), тогава и само тогава, когато  $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 = \text{const} \neq 0$ .*

За функцията  $k$ , определена от изображението на Вайнгартен, получаваме, че се изразява чрез функциите  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  и  $\nu$  по следния начин:

$$k = 4\nu^2\mu_1\mu_2 + (\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)^2. \quad (1.46)$$

От формули (1.45) и (1.46) получаваме, че знакът на израза  $\varkappa^2 - k$  зависи от произведението на функциите  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . По-точно, в сила е следната връзка:

$$\varkappa^2 - k = -4\nu^2\mu_1\mu_2.$$

Ще докажем фундаментални теореми за времеподобните повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$  от общ тип.

Ако допуснем, че  $\mu_1(u, v) = 0$  и  $\mu_2(u, v) = 0$  за всяко  $(u, v) \in \mathcal{D}$ , тогава повърхнината се състои само от инфлексни точки, т.е. във всяка точка  $p \in M^2$  първото нормално пространство  $\text{Im } \sigma_p = \text{span} \{ \sigma(x, y) : x, y \in T_p M^2 \}$  е едномерно. В този случай повърхнината е развиваема или лежи в 3-мерно пространство [48]. Затова, считаме, че  $\mu_1^2 + \mu_2^2 \neq 0$  поне в подобласт  $\mathcal{D}_0$  на  $\mathcal{D}$ . Без ограничение на общността можем да приемем, че  $\mu_1 \neq 0$ . Ще разгледаме отделно двата случая:

- $\mu_1 \neq 0$  и  $\mu_2 \neq 0$  в някоя подобласт;
- $\mu_1 \neq 0$  и  $\mu_2 = 0$  в някоя подобласт.

**I случай.** Нека  $\mu_1 \neq 0$  и  $\mu_2 \neq 0$  в дефиниционната област. В този случай казваме, че времеподобната повърхнина е от *първи тип*.

Като използваме (1.39) и (1.40), изразяваме функциите  $\beta_1$  и  $\beta_2$  по следния начин:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{\mu_2} \left( x(\lambda_2) + y(\nu) + 2\gamma_1\lambda_2 \right); \\ \beta_2 &= \frac{1}{\mu_1} \left( x(\nu) + y(\lambda_1) + 2\gamma_2\lambda_1 \right). \end{aligned} \quad (1.47)$$

Като се има предвид, че  $x = \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial u}$ ,  $y = \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial v}$  и  $\gamma_1 = \frac{f_u}{f^2}$ ,  $\gamma_2 = \frac{f_v}{f^2}$ , от (1.47) получаваме

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{1}{f\mu_2} \left( (\lambda_2)_u + \nu_v + \lambda_2(\ln f^2)_u \right); \\ \beta_2 &= \frac{1}{f\mu_1} \left( \nu_u + (\lambda_1)_v + \lambda_1(\ln f^2)_v \right).\end{aligned}$$

Следователно, функциите  $\beta_1$  и  $\beta_2$  се изразяват чрез  $f, \nu, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ . И така, имаме шест функции  $f, \nu, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ , удовлетворяващи следните четири диференциални уравнения, получени съответно от (1.41), (1.42), (1.43), и (1.44):

$$\begin{aligned}(\lambda_2^2 + \mu_2^2)_u + (\ln f^4)_u(\lambda_2^2 + \mu_2^2) + 2\lambda_2\nu_v + \frac{2\nu\mu_2}{\mu_1} \left( \nu_u + (\lambda_1)_v + \lambda_1(\ln f^2)_v \right) &= 0; \\ (\lambda_1^2 + \mu_1^2)_v + (\ln f^4)_v(\lambda_1^2 + \mu_1^2) + 2\lambda_1\nu_u + \frac{2\nu\mu_1}{\mu_2} \left( (\lambda_2)_u + \nu_v + \lambda_2(\ln f^2)_u \right) &= 0; \\ \frac{2ff_{uv} - 2f_u f_v}{f^4} + \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 - \nu^2 &= 0; \\ (\mu_1\lambda_2 - \mu_2\lambda_1) (f^2\mu_1\mu_2 - (\ln f^2)_{uv}) + \nu_{uu}\mu_2 - \nu_{vv}\mu_1 + (\lambda_1)_{uv}\mu_2 - (\lambda_2)_{uv}\mu_1 + \\ + \mu_2(\lambda_1)_u(\ln f^2)_v - \mu_1(\lambda_2)_v(\ln f^2)_u - \frac{\mu_2(\mu_1)_u}{\mu_1} (\nu_u + (\lambda_1)_v + \lambda_1(\ln f^2)_v) + \\ + \frac{\mu_1(\mu_2)_v}{\mu_2} ((\lambda_2)_u + \nu_v + \lambda_2(\ln f^2)_u) &= 0.\end{aligned}$$

В сила е следната фундаментална теорема за времениподобните повърхнини от първи тип.

**Теорема 1.4.15.** Нека  $f(u, v) > 0$ ,  $\nu(u, v)$ ,  $\lambda_1(u, v)$ ,  $\mu_1(u, v)$ ,  $\lambda_2(u, v)$ ,  $\mu_2(u, v)$ ,  $\mu_1\mu_2 \neq 0$  са шест гладки функции, дефинирани в област  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ , и удовлетворяващи следните условия

$$\begin{aligned}(i) \quad & (\lambda_2^2 + \mu_2^2)_u + (\ln f^4)_u(\lambda_2^2 + \mu_2^2) + 2\lambda_2\nu_v + \frac{2\nu\mu_2}{\mu_1} \left( \nu_u + (\lambda_1)_v + \lambda_1(\ln f^2)_v \right) = 0; \\ (ii) \quad & (\lambda_1^2 + \mu_1^2)_v + (\ln f^4)_v(\lambda_1^2 + \mu_1^2) + 2\lambda_1\nu_u + \frac{2\nu\mu_1}{\mu_2} \left( (\lambda_2)_u + \nu_v + \lambda_2(\ln f^2)_u \right) = 0; \\ (iii) \quad & \frac{2ff_{uv} - 2f_u f_v}{f^4} + \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 - \nu^2 = 0; \\ (iv) \quad & (\mu_1\lambda_2 - \mu_2\lambda_1) (f^2\mu_1\mu_2 - (\ln f^2)_{uv}) + \nu_{uu}\mu_2 - \nu_{vv}\mu_1 + (\lambda_1)_{uv}\mu_2 - (\lambda_2)_{uv}\mu_1 + \\ & + \mu_2(\lambda_1)_u(\ln f^2)_v - \mu_1(\lambda_2)_v(\ln f^2)_u - \frac{\mu_2(\mu_1)_u}{\mu_1} (\nu_u + (\lambda_1)_v + \lambda_1(\ln f^2)_v) + \\ & + \frac{\mu_1(\mu_2)_v}{\mu_2} ((\lambda_2)_u + \nu_v + \lambda_2(\ln f^2)_u) = 0.\end{aligned}$$

(1.48)

Нека  $\{x_0, y_0, (n_1)_0, (n_2)_0\}$  е псевдо-ортонормиран репер в точка  $p_0 \in \mathbb{R}_1^4$ . Тогава, съществува подобласт  $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$  и единствена времеподобна повърхнина от първи тип  $M^2 : z = z(u, v)$ ,  $(u, v) \in \mathcal{D}_0$ , параметризирана спрямо изотропни параметри, такава, че  $M^2$  минава през  $p_0$  и  $\{x_0, y_0, (n_1)_0, (n_2)_0\}$  е геометричният репер на  $M^2$  в точката  $p_0$ .

*Доказателство.* Като използваме дадените функции, дефинираме функциите

$$\gamma_1 = \frac{f_u}{f^2}, \quad \gamma_2 = \frac{f_v}{f^2}, \quad \beta_1 = \frac{(\lambda_2)_u + \nu_v + \lambda_2(\ln f^2)_u}{f\mu_2}, \quad \beta_2 = \frac{\nu_u + (\lambda_1)_v + \lambda_1(\ln f^2)_v}{f\mu_1}$$

и разглеждаме следната система от частни диференциални уравнения за неизвестните векторни функции  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $n_1 = n_1(u, v)$ ,  $n_2 = n_2(u, v)$  в  $\mathbb{R}_1^4$ :

$$\begin{aligned} x_u &= f(\gamma_1 x + \lambda_1 n_1 + \mu_1 n_2) & x_v &= f(-\gamma_2 x - \nu n_1) \\ y_u &= f(-\gamma_1 y - \nu n_1) & y_v &= f(\gamma_2 y + \lambda_2 n_1 + \mu_2 n_2) \\ (n_1)_u &= f(-\nu x + \lambda_1 y + \beta_1 n_2) & (n_1)_v &= f(\lambda_2 x - \nu y + \beta_2 n_2) \\ (n_2)_u &= f(\mu_1 y - \beta_1 n_1) & (n_2)_v &= f(\mu_2 x - \beta_2 n_1) \end{aligned} \quad (1.49)$$

За удобство въвеждаме следните означения:

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{A} = f \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & \lambda_1 & \mu_1 \\ 0 & -\gamma_1 & -\nu & 0 \\ -\nu & \lambda_1 & 0 & \beta_1 \\ 0 & \mu_1 & -\beta_1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{B} = f \begin{pmatrix} -\gamma_2 & 0 & -\nu & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \lambda_2 & \mu_2 \\ \lambda_2 & -\nu & 0 & \beta_2 \\ \mu_2 & 0 & -\beta_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогава, системата (1.49) може да се запише в матричен вид, както следва:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_u &= \mathcal{A}\mathcal{W}, \\ \mathcal{W}_v &= \mathcal{B}\mathcal{W}. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Условиата за интегрируемост на системата (1.50) са  $\mathcal{W}_{uv} = \mathcal{W}_{vu}$ , т.е.

$$\frac{\partial a_i^k}{\partial v} - \frac{\partial b_i^k}{\partial u} + \sum_{j=1}^4 (a_i^j b_j^k - b_i^j a_j^k) = 0, \quad i, k = 1, \dots, 4, \quad (1.51)$$

където чрез  $a_i^j$  и  $b_i^j$  ( $i, j = 1, \dots, 4$ ) бележим съответно елементите на матриците  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ . Като използваме условията, дадени в (1.48), проверяваме, че равенствата (1.51) са изпълнени. Следователно, съществува подобласт  $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}$  и единствени векторни функции  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $n_1 = n_1(u, v)$ ,  $n_2 = n_2(u, v)$ ,  $(u, v) \in \mathcal{D}_1$ , които

удовлетворяват системата (1.49) и началните условия

$$x(u_0, v_0) = x_0, \quad y(u_0, v_0) = y_0, \quad n_1(u_0, v_0) = (n_1)_0, \quad n_2(u_0, v_0) = (n_2)_0.$$

За да докажем, че векторните функции  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $n_1(u, v)$ ,  $n_2(u, v)$  образуват псевдо-ортонормиран репер в  $\mathbb{R}_1^4$  за всяко  $(u, v) \in \mathcal{D}_1$ , разглеждаме следните функции:

$$\begin{aligned} h_1 &= \langle x, x \rangle; & h_5 &= \langle x, y \rangle + 1; & h_8 &= \langle y, n_1 \rangle; \\ h_2 &= \langle y, y \rangle; & h_6 &= \langle x, n_1 \rangle; & h_9 &= \langle y, n_2 \rangle; \\ h_3 &= \langle n_1, n_1 \rangle - 1; & h_7 &= \langle x, n_2 \rangle; & h_{10} &= \langle n_1, n_2 \rangle; \\ h_4 &= \langle n_2, n_2 \rangle - 1; \end{aligned}$$

дефинирани за  $(u, v) \in \mathcal{D}_1$ . Като се има предвид, че  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $n_1(u, v)$ ,  $n_2(u, v)$  удовлетворяват (1.49), получаваме системата

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_i}{\partial u} &= k_i^j h_j, \\ \frac{\partial h_i}{\partial v} &= m_i^j h_j; \end{aligned} \quad i = 1, \dots, 10, \quad (1.52)$$

където  $k_i^j, m_i^j$ ,  $i, j = 1, \dots, 10$  са функции на  $(u, v) \in \mathcal{D}_1$ . Системата (1.52) е линейна система от частни диференциални уравнения за функциите  $h_i(u, v)$ , удовлетворяващи условията  $h_i(u_0, v_0) = 0$  за всяко  $i = 1, \dots, 10$ , понеже  $\{x_0, y_0, (n_1)_0, (n_2)_0\}$  е псевдо-ортонормиран репер. Тогава,  $h_i(u, v) = 0$ ,  $i = 1, \dots, 10$  за всяко  $(u, v) \in \mathcal{D}_1$ . Следователно, векторните функции  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $n_1(u, v)$ ,  $n_2(u, v)$  образуват псевдо-ортонормиран репер в  $\mathbb{R}_1^4$  за всяко  $(u, v) \in \mathcal{D}_1$ .

Разглеждаме следната система от частни диференциални уравнения за векторната функция  $z(u, v)$ :

$$\begin{aligned} z_u &= f x \\ z_v &= f y \end{aligned} \quad (1.53)$$

Като използваме (1.48) и (1.49), проверяваме, че условията за интегрируемост  $z_{uv} = z_{vu}$  на системата (1.53) са изпълнени. Следователно, съществува подобласт  $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_1$  и единствена векторна функция  $z = z(u, v)$ ,  $(u, v) \in \mathcal{D}_0$ , удовлетворяваща началното условие  $z(u_0, v_0) = p_0$ .

Накрая, разглеждаме повърхнината  $M^2 : z = z(u, v)$ ,  $(u, v) \in \mathcal{D}_0$ . Очевидно,  $M^2$  е времениподобна повърхнина в  $\mathbb{R}_1^4$  от първи тип, параметризирана спрямо изотропните параметри  $(u, v)$ , тъй като  $\langle z_u, z_u \rangle = 0$ ,  $\langle z_v, z_v \rangle = 0$ ,  $\langle z_u, z_v \rangle = -f^2(u, v)$ .

□



**II случай.** Нека  $\mu_1 \neq 0$  и  $\mu_2 = 0$  в дефиниционната област. В този случай имаме следните подслучаи:

$$(a) \quad \lambda_2 \neq 0;$$

$$(b) \quad \lambda_2 = 0.$$

**Подслучай II (a):**  $\lambda_2 \neq 0$ . В този подслучай казваме, че времеподобната повърхнина е от *втори тип*.

Условията за интегрируемост при  $\mu_2 = 0$  и  $\lambda_2 \neq 0$  имат следния вид:

$$x(\lambda_2) + y(\nu) + 2\gamma_1\lambda_2 = 0; \quad (1.54)$$

$$x(\nu) + y(\lambda_1) + 2\gamma_2\lambda_1 - \mu_1\beta_2 = 0; \quad (1.55)$$

$$\nu\beta_2 + \lambda_2\beta_1 = 0; \quad (1.56)$$

$$y(\mu_1) + 2\gamma_2\mu_1 + \nu\beta_1 + \lambda_1\beta_2 = 0; \quad (1.57)$$

$$x(\gamma_2) + y(\gamma_1) + 2\gamma_1\gamma_2 - \nu^2 + \lambda_1\lambda_2 = 0; \quad (1.58)$$

$$x(\beta_2) - y(\beta_1) + \mu_1\lambda_2 + \gamma_1\beta_2 - \gamma_2\beta_1 = 0. \quad (1.59)$$

От (1.55) следва, че функцията  $\beta_2$  се изразява по следния начин:

$$\beta_2 = \frac{1}{\mu_1}(x(\nu) + y(\lambda_1) + 2\gamma_2\lambda_1) = \frac{1}{f\mu_1}(\nu_u + (\lambda_1)_v + (\ln f^2)_v\lambda_1).$$

Следователно, като използваме (1.56), получаваме:

$$\beta_1 = -\frac{\nu\beta_2}{\lambda_2} = -\frac{\nu}{f\mu_1\lambda_2}(\nu_u + (\lambda_1)_v + (\ln f^2)_v\lambda_1).$$

От (1.54) получаваме уравнението:

$$(\lambda_2)_u + \nu_v + (\ln f^2)_u\lambda_2 = 0.$$

От равенство (1.58) намираме:

$$\frac{2ff_{uv} - 2f_u f_v}{f^4} - (\nu^2 - \lambda_1\lambda_2) = 0.$$

Използвайки (1.57), след пресмятане получаваме следното уравнение:

$$(\mu_1)_v + (\ln f^2)_v\mu_1 - \frac{\nu^2 - \lambda_1\lambda_2}{\lambda_2\mu_1}(\nu_u + (\lambda_1)_v + (\ln f^2)_v\lambda_1) = 0.$$

Като имаме предвид (1.59) и пресметнем производните на  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , получаваме ра-

ВЕНСТВОТО:

$$\begin{aligned} & f^2 \mu_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2 \left( \nu_{uu} + (\lambda_1)_{uv} + (\lambda_1)_u (\ln f^2)_v + \lambda_1 (\ln f^2)_{uv} \right) + \\ & + \nu \left( \nu_{uv} + (\lambda_1)_{vv} + (\lambda_1)_v (\ln f^2)_v + \lambda_1 (\ln f^2)_{vv} \right) - \\ & - \left( \nu_u + (\lambda_1)_v + \lambda_1 (\ln f^2)_v \right) \left( \lambda_2 (\ln |\mu_1|)_u + \nu_v - \nu (\ln |\mu_1|)_v - \nu (\ln |\lambda_2|)_v \right) = 0. \end{aligned}$$

Окончателно, можем да формулираме фундаменталната теорема за времеподобните повърхнини от втори тип.

**Теорема 1.4.16.** *Нека  $f(u, v) > 0$ ,  $\nu(u, v)$ ,  $\lambda_1(u, v)$ ,  $\mu_1(u, v)$ ,  $\lambda_2(u, v) \neq 0$  са пет гладки функции, дефинирани в област  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  и удовлетворяващи следните условия:*

$$\begin{aligned} (i) \quad & (\lambda_2)_u + \nu_v + (\ln f^2)_u \lambda_2 = 0; \\ (ii) \quad & (\mu_1)_v + (\ln f^2)_v \mu_1 - \frac{\nu^2 - \lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 \mu_1} (\nu_u + (\lambda_1)_v + (\ln f^2)_v \lambda_1) = 0; \\ (iii) \quad & \frac{2ff_{uv} - 2f_u f_v}{f^4} - (\nu^2 - \lambda_1 \lambda_2) = 0; \\ (iv) \quad & f^2 \mu_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2 \left( \nu_{uu} + (\lambda_1)_{uv} + (\lambda_1)_u (\ln f^2)_v + \lambda_1 (\ln f^2)_{uv} \right) + \\ & + \nu \left( \nu_{uv} + (\lambda_1)_{vv} + (\lambda_1)_v (\ln f^2)_v + \lambda_1 (\ln f^2)_{vv} \right) - \\ & - \left( \nu_u + (\lambda_1)_v + \lambda_1 (\ln f^2)_v \right) \left( \lambda_2 (\ln |\mu_1|)_u + \nu_v - \nu (\ln |\mu_1|)_v - \nu (\ln |\lambda_2|)_v \right) = 0. \end{aligned}$$

Нека  $\{x_0, y_0, (n_1)_0, (n_2)_0\}$  е псевдо-ортонормиран репер в точка  $p_0 \in \mathbb{R}_1^4$ . Тогава, съществува подобласт  $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$  и единствена времеподобна повърхнина от втори тип  $M^2 : z = z(u, v)$ ,  $(u, v) \in \mathcal{D}_0$ , параметризирана спрямо изотропни параметри, такава, че  $M^2$  минава през  $p_0$  и  $\{x_0, y_0, (n_1)_0, (n_2)_0\}$  е геометричният репер на  $M^2$  в точката  $p_0$ .

*Доказателство.* Дефинираме следните функции:

$$\gamma_1 = \frac{f_u}{f^2}, \quad \gamma_2 = \frac{f_v}{f^2}, \quad \beta_1 = -\frac{\nu}{f\mu_1\lambda_2} (\nu_u + (\lambda_1)_v + (\ln f^2)_v \lambda_1), \quad \beta_2 = \frac{1}{f\mu_1} (\nu_u + (\lambda_1)_v + (\ln f^2)_v \lambda_1)$$

и разглеждаме системата от частни диференциални уравнения за неизвестните векторни функции  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $n_1 = n_1(u, v)$ ,  $n_2 = n_2(u, v)$  в  $\mathbb{R}_1^4$ :

$$\begin{aligned} x_u &= f(\gamma_1 x + \lambda_1 n_1 + \mu_1 n_2) & x_v &= f(-\gamma_2 x - \nu n_1) \\ y_u &= f(-\gamma_1 y - \nu n_1) & y_v &= f(\gamma_2 y + \lambda_2 n_1) \\ (n_1)_u &= f(-\nu x + \lambda_1 y + \beta_1 n_2) & (n_1)_v &= f(\lambda_2 x - \nu y + \beta_2 n_2) \\ (n_2)_u &= f(\mu_1 y - \beta_1 n_1) & (n_2)_v &= f(-\beta_2 n_1) \end{aligned} \tag{1.60}$$

Означаваме

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{A} = f \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & \lambda_1 & \mu_1 \\ 0 & -\gamma_1 & -\nu & 0 \\ -\nu & \lambda_1 & 0 & \beta_1 \\ 0 & \mu_1 & -\beta_1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{B} = f \begin{pmatrix} -\gamma_2 & 0 & -\nu & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda_2 & -\nu & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & -\beta_2 & 0 \end{pmatrix}$$

и записваме системата (1.60) в матричен вид по следния начин:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_u &= \mathcal{A}\mathcal{W}, \\ \mathcal{W}_v &= \mathcal{B}\mathcal{W}. \end{aligned}$$

По-нататък доказателството на теоремата е аналогично на доказателството на Теорема 1.4.15. □

**Подслучай II (b):**  $\lambda_2 = 0$ . В този подслучай наричаме повърхнината, удовлетворяваща  $\mu_2 = 0$  и  $\lambda_2 = 0$ , времеподобна повърхнина от *трети тип*.

Като имаме предвид, че  $\lambda_2 = \mu_2 = 0$ , условията за интегрируемост приемат следния вид:

$$y(\nu) = 0 \tag{1.61}$$

$$x(\nu) + y(\lambda_1) + 2\gamma_2\lambda_1 - \mu_1\beta_2 = 0 \tag{1.62}$$

$$\nu\beta_2 = 0 \tag{1.63}$$

$$y(\mu_1) + 2\gamma_2\mu_1 + \nu\beta_1 + \lambda_1\beta_2 = 0 \tag{1.64}$$

$$x(\gamma_2) + y(\gamma_1) + 2\gamma_1\gamma_2 - \nu^2 = 0 \tag{1.65}$$

$$x(\beta_2) - y(\beta_1) + \gamma_1\beta_2 - \gamma_2\beta_1 = 0. \tag{1.66}$$

От равенство (1.61) следва, че  $\nu = \nu(u)$ . Понеже  $\nu \neq 0$ , то от (1.63) намираме  $\beta_2 = 0$ . Тогава, от равенство (1.62) получаваме уравнението

$$x(\nu) + y(\lambda_1) + 2\gamma_2\lambda_1 = 0,$$

което е еквивалентно на

$$\nu_u + (\lambda_1)_v + \lambda_1(\ln f^2)_v = 0. \tag{1.67}$$

Като използваме (1.64), представяме функцията  $\beta_1$  по следния начин:

$$\beta_1 = -\frac{1}{\nu f} ((\mu_1)_v + \mu_1(\ln f^2)_v)$$

и с помощта на (1.66) получаваме следното равенство

$$(\mu_1)_{vv} + (\mu_1)_v(\ln f^2)_v + \mu_1(\ln f^2)_{vv} = 0.$$

Накрая, от равенство (1.65) намираме

$$\frac{2ff_{uv} - 2f_u f_v}{f^4} = \nu^2.$$

Следователно, функцията  $\nu$  се изразява чрез функцията  $f$  и нейните производни по следния начин:

$$\nu^2 = \frac{1}{f^2} (\ln f^2)_{uv}. \quad (1.68)$$

Последното равенство показва, че функцията  $f^{-2} (\ln f^2)_{uv}$  зависи само от параметъра  $u$ , понеже  $\nu = \nu(u)$ . Като използваме (1.68), можем да запишем равенство (1.67) в следния вид:

$$(\lambda_1)_v + \lambda_1(\ln f^2)_v + \left( f^{-1} \sqrt{(\ln f^2)_{uv}} \right)_u = 0.$$

И така, можем да формулираме фундаменталната теорема за времениподобните повърхнини от трети тип.

**Теорема 1.4.17.** *Нека  $f(u, v) > 0$ ,  $\lambda_1(u, v)$  и  $\mu_1(u, v)$  са три гладки функции, дефинирани в област  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  и удовлетворяващи условията*

- (i)  $(f^{-2} (\ln f^2)_{uv})_v = 0$ ;
- (ii)  $(\lambda_1)_v + \lambda_1(\ln f^2)_v + (f^{-1} \sqrt{(\ln f^2)_{uv}})_u = 0$ ;
- (iii)  $(\mu_1)_{vv} + (\mu_1)_v(\ln f^2)_v + \mu_1(\ln f^2)_{vv} = 0$ .

Нека  $\{x_0, y_0, (n_1)_0, (n_2)_0\}$  е псевдо-ортонормиран репер в точка  $p_0 \in \mathbb{R}_1^4$ . Тогава, съществува подобласт  $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$  и единствена времениподобна повърхнина от трети тип  $M^2 : z = z(u, v)$ ,  $(u, v) \in \mathcal{D}_0$ , параметризирана спрямо изотропни параметри, такава, че  $M^2$  минава през  $p_0$  и  $\{x_0, y_0, (n_1)_0, (n_2)_0\}$  е геометричният репер на  $M^2$  в точка  $p_0$ .

*Доказателство.* Дефинираме функциите

$$\nu = f^{-1} \sqrt{(\ln f^2)_{uv}}, \quad \gamma_1 = \frac{f_u}{f^2}, \quad \gamma_2 = \frac{f_v}{f^2}, \quad \beta_1 = -((\ln f^2)_{uv})^{-\frac{1}{2}} ((\mu_1)_v + \mu_1(\ln f^2)_v)$$

и разглеждаме следната система от частни диференциални уравнения за неизвест-

ните векторни функции  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $n_1 = n_1(u, v)$ ,  $n_2 = n_2(u, v)$  в  $\mathbb{R}_1^4$ :

$$\begin{aligned} x_u &= f(\gamma_1 x + \lambda_1 n_1 + \mu_1 n_2) & x_v &= f(-\gamma_2 x - \nu n_1) \\ y_u &= f(-\gamma_1 y - \nu n_1) & y_v &= f\gamma_2 y \\ (n_1)_u &= f(-\nu x + \lambda_1 y + \beta_1 n_2) & (n_1)_v &= -f\nu y \\ (n_2)_u &= f(\mu_1 y - \beta_1 n_1) & (n_2)_v &= 0 \end{aligned}$$

По-нататък доказателството следва стъпките в доказателството на Теорема 1.4.15. □

## 1.5 Времеподобни повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина

В този параграф ще разглеждаме времеподобни повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина, т.е. повърхнини, за които  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  и  $\nu \neq \text{const.}$  За този клас повърхнини ще въведем специални параметри, наречени *канонични*, и ще докажем фундаментална теорема за съществуване и единственост на езика на каноничните параметри.

Нека  $M^2 : z = z(u, v)$ ,  $(u, v) \in D$ ,  $D \subset \mathbb{R}^2$  е локална параметризация спрямо изотропни параметри на времеподобна повърхнина с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина и нека  $\{x, y, n_1, n_2\}$  е геометричният репер, въведен в §1.4. Тъй като  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ , деривационните формули (1.34) и (1.35) на повърхнината имат следния вид:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_x x &= \gamma_1 x + \lambda_1 n_1 + \mu_1 n_2; & \tilde{\nabla}_x n_1 &= -\nu x + \lambda_1 y; \\ \tilde{\nabla}_x y &= -\gamma_1 y - \nu n_1; & \tilde{\nabla}_y n_1 &= \lambda_2 x - \nu y; \\ \tilde{\nabla}_y x &= -\gamma_2 x - \nu n_1; & \tilde{\nabla}_x n_2 &= +\mu_1 y; \\ \tilde{\nabla}_y y &= \gamma_2 y + \lambda_2 n_1 + \mu_2 n_2; & \tilde{\nabla}_y n_2 &= \mu_2 x. \end{aligned}$$

Условията за интегрируемост са:

$$\begin{aligned}
 x(\lambda_2) + y(\nu) + 2\gamma_1\lambda_2 &= 0; \\
 x(\nu) + y(\lambda_1) + 2\gamma_2\lambda_1 &= 0; \\
 x(\mu_2) + 2\gamma_1\mu_2 &= 0; \\
 y(\mu_1) + 2\gamma_2\mu_1 &= 0; \\
 x(\gamma_2) + y(\gamma_1) + 2\gamma_1\gamma_2 - \nu^2 + \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 &= 0; \\
 \mu_1\lambda_2 - \lambda_1\mu_2 &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.69}$$

**Забележка 1.5.1.** Считаме, че  $\mu_1^2 + \mu_2^2 \neq 0$  поне в подобласт  $D_0 \subset D$ , тъй като в противен случай повърхнината се състои само от инфлексни точки и понеже  $\tilde{\nabla}_x n_2 = 0$ ,  $\tilde{\nabla}_y n_2 = 0$ , то  $M^2$  лежи в тримерното пространство на Минковски  $\mathbb{R}_1^3 = \text{span}\{x, y, n_1\}$ .

Без ограничение на общността считаме, че  $\mu_1 \neq 0$ . Тогава от последното равенство на (1.69) получаваме

$$\lambda_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1} \lambda_1.$$

Гаусовата кривина на повърхнината се изразява чрез функциите  $\nu$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  по следния начин:

$$K = \nu^2 - \lambda_1\lambda_2 - \mu_1\mu_2.$$

Като използваме, че  $\nu^2 = H^2$  (за удобство означаваме  $H^2 = \langle H, H \rangle$ ), получаваме  $K - H^2 = -(\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2)$ . Следователно,

$$K - H^2 = -\frac{\mu_2}{\mu_1}(\lambda_1^2 + \mu_1^2).$$

И така, повърхнините с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина могат да бъдат разделени в два основни класа:

- $K - H^2 \neq 0$  (което е еквивалентно на  $\mu_1\mu_2 \neq 0$ ) в някоя подобласт;
- $K - H^2 = 0$  (което е еквивалентно на  $\mu_1\mu_2 = 0$ ) в някоя подобласт.

### 1.5.1 Повърхнини, удовлетворяващи $K - H^2 \neq 0$

В този параграф ще разгледаме времениподобни повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина, за които  $K - H^2 \neq 0$ , т.е.  $\mu_1\mu_2 \neq 0$  в дефиницион-

ната област. В този случай, от третото и четвъртото равенство на (1.69) получаваме:

$$\begin{aligned}x(\ln |\mu_2|) &= -2\gamma_1; \\ y(\ln |\mu_1|) &= -2\gamma_2.\end{aligned}$$

От друга страна, функциите  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  се изразяват чрез функцията  $f$  по следния начин:  $\gamma_1 = x(\ln f)$ ,  $\gamma_2 = y(\ln f)$ . Следователно, за функциите  $f^2|\mu_1|$  и  $f^2|\mu_2|$  получаваме:

$$\begin{aligned}x(\ln f^2|\mu_2|) &= 0; \\ y(\ln f^2|\mu_1|) &= 0.\end{aligned}\tag{1.70}$$

От (1.70) следва, че функцията  $f^2|\mu_1|$  зависи само от параметъра  $u$ , а функцията  $f^2|\mu_2|$  зависи само от  $v$ . Следователно, съществуват гладки функции  $\varphi(u) > 0$  и  $\psi(v) > 0$  такива, че:

$$f^2|\mu_1| = \varphi(u); \quad f^2|\mu_2| = \psi(v).$$

Разглеждаме следната смяна на параметризацията:

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \int_{u_0}^u \sqrt{\varphi(u)} du + \bar{u}_0, \quad \bar{u}_0 = \text{const}; \\ \bar{v} &= \int_{v_0}^v \sqrt{\psi(v)} dv + \bar{v}_0, \quad \bar{v}_0 = \text{const}.\end{aligned}$$

При тази смяна на параметрите получаваме:

$$\begin{aligned}z_{\bar{u}} &= \frac{z_u}{\sqrt{\varphi(u)}} = \frac{z_u}{f\sqrt{|\mu_1|}}, \\ z_{\bar{v}} &= \frac{z_v}{\sqrt{\psi(v)}} = \frac{z_v}{f\sqrt{|\mu_2|}},\end{aligned}$$

откъдето следва, че

$$\langle z_{\bar{u}}, z_{\bar{u}} \rangle = 0; \quad \langle z_{\bar{u}}, z_{\bar{v}} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{|\mu_1||\mu_2|}}; \quad \langle z_{\bar{v}}, z_{\bar{v}} \rangle = 0.$$

Следователно,  $(\bar{u}, \bar{v})$  са специални изотропни параметри, по отношение на които метричният тензор на повърхнината се задава по следния начин

$$g = -\bar{f}^2(\bar{u}, \bar{v})(d\bar{u} \otimes d\bar{v} + d\bar{v} \otimes d\bar{u}),$$

където функцията  $\bar{f}$  се изразява чрез функциите  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , както следва:

$$\bar{f}(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{\sqrt[4]{|\mu_1||\mu_2|}}.$$

Спрямо изотропните направления

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{z_{\bar{u}}}{\bar{f}} = \frac{\sqrt[4]{|\mu_1||\mu_2|}}{\sqrt{|\mu_1|}} x, \\ \bar{y} &= \frac{z_{\bar{v}}}{\bar{f}} = \frac{\sqrt[4]{|\mu_1||\mu_2|}}{\sqrt{|\mu_2|}} y,\end{aligned}$$

имаме следните равенства за втория фундаментален тензор  $\sigma$ :

$$\begin{aligned}\sigma(\bar{x}, \bar{x}) &= \frac{\sqrt{|\mu_1||\mu_2|}}{|\mu_1|} \sigma(x, x) = \lambda_1 \frac{\sqrt{|\mu_1||\mu_2|}}{|\mu_1|} n_1 + \mu_1 \frac{\sqrt{|\mu_1||\mu_2|}}{|\mu_1|} n_2; \\ \sigma(\bar{x}, \bar{y}) &= \sigma(x, y) = -\nu n_1; \\ \sigma(\bar{y}, \bar{y}) &= \frac{\sqrt{|\mu_1||\mu_2|}}{|\mu_2|} \sigma(y, y) = \lambda_2 \frac{\sqrt{|\mu_1||\mu_2|}}{|\mu_2|} n_1 + \mu_2 \frac{\sqrt{|\mu_1||\mu_2|}}{|\mu_2|} n_2.\end{aligned}$$

Тъй като  $\mu_1$  и  $\mu_2$  са гладки функции и ние изучаваме локалната теория, можем да считаме, че  $\text{sign}(\mu_1) = \varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_1 = \pm 1$  и  $\text{sign}(\mu_2) = \varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_2 = \pm 1$  в някаква подобласт. И така, като използваме, че  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{|\mu_2|}{|\mu_1|} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ , получаваме формулите:

$$\begin{aligned}\sigma(\bar{x}, \bar{x}) &= \lambda_1 \frac{\sqrt{|\mu_1||\mu_2|}}{|\mu_1|} n_1 + \varepsilon_1 \sqrt{|\mu_1||\mu_2|} n_2; \\ \sigma(\bar{y}, \bar{y}) &= \lambda_1 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\sqrt{|\mu_1||\mu_2|}}{|\mu_1|} n_1 + \varepsilon_2 \sqrt{|\mu_1||\mu_2|} n_2.\end{aligned}$$

Означаваме  $\bar{\lambda} = \lambda_1 \frac{\sqrt{|\mu_1||\mu_2|}}{|\mu_1|}$ ,  $\bar{\mu} = \varepsilon_1 \sqrt{|\mu_1||\mu_2|}$  и получаваме:

$$\begin{aligned}\sigma(\bar{x}, \bar{x}) &= \bar{\lambda} n_1 + \bar{\mu} n_2; \\ \sigma(\bar{y}, \bar{y}) &= \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \bar{\lambda} n_1 + \bar{\mu} n_2.\end{aligned}$$

И така, вземайки предвид знаците на  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , можем да заключим, че съществуват два подслучая:

1.  $\mu_1$  и  $\mu_2$  имат един и същ знак в разглежданата подобласт, т.е.  $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = 1$ , и следователно, имаме  $\sigma(\bar{x}, \bar{x}) = \sigma(\bar{y}, \bar{y})$ .



2.  $\mu_1$  и  $\mu_2$  имат различни знаци в разглежданата подобласт, т.е.  $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = -1$ , и следователно, имаме  $\sigma(\bar{x}, \bar{x}) = -\sigma(\bar{y}, \bar{y})$ ;

Като използваме, че  $K - H^2 = -\frac{\mu_2}{\mu_1}(\lambda_1^2 + \mu_1^2)$ , получаваме, че първият подслучай съответства на  $K - H^2 < 0$ , а вторият подслучай съответства на  $K - H^2 > 0$ .

Следователно, след смяната на параметрите, получаваме формулите:

$$\begin{aligned}\sigma(\bar{x}, \bar{x}) &= \bar{\lambda} n_1 + \bar{\mu} n_2 \\ \sigma(\bar{x}, \bar{y}) &= -\nu n_1, \quad \text{когато } K - H^2 > 0; \\ \sigma(\bar{y}, \bar{y}) &= -\bar{\lambda} n_1 - \bar{\mu} n_2\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\sigma(\bar{x}, \bar{x}) &= \bar{\lambda} n_1 + \bar{\mu} n_2 \\ \sigma(\bar{x}, \bar{y}) &= -\nu n_1, \quad \text{когато } K - H^2 < 0. \\ \sigma(\bar{y}, \bar{y}) &= \bar{\lambda} n_1 + \bar{\mu} n_2\end{aligned}$$

И в двата случая ( $K - H^2 > 0$  и  $K - H^2 < 0$ ), метричната функция  $\bar{f}$  се изразява чрез функцията  $\bar{\mu}$  по следния начин:

$$\bar{f} = \frac{1}{\sqrt{|\bar{\mu}|}}.$$

Ще въведем понятието канонични изотропни параметри за времеподобна повърхнина с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина чрез следващата дефиниция.

**Дефиниция 1.5.2.** Нека  $M^2$  е времеподобна повърхнина в  $\mathbb{R}_1^4$  с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина и  $K - H^2 \neq 0$ . Изотропните параметри  $(u, v)$  се наричат *канонични*, ако метричната функция  $f$  се представя чрез формулата:

$$f(u, v) = \frac{1}{\sqrt{|\mu|}}, \quad \mu \neq 0.$$

Разглежданията по-горе ни дават основание да формулираме следното твърдение:

**Твърдение 1.5.3.** *Всяка времеподобна повърхнина с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина, за която  $K - H^2 \neq 0$ , локално може да се параметризира спрямо канонични параметри.*

Нека  $M^2 : z = z(u, v)$ ,  $(u, v) \in \mathcal{D}$  е времеподобна повърхнина с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина, за която  $K - H^2 \neq 0$ , и нека  $M^2$  е па-

раметризирана спрямо изотропни канонични параметри  $(u, v)$ . Спрямо каноничните изотропни параметри деривационните формули на  $M^2$  приемат вида:

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_x x &= \gamma_1 x + \lambda n_1 + \mu n_2; & \tilde{\nabla}_x n_1 &= -\nu x + \lambda y; \\ \tilde{\nabla}_x y &= -\gamma_1 y - \nu n_1; & \tilde{\nabla}_y n_1 &= -\varepsilon \lambda x - \nu y; \\ \tilde{\nabla}_y x &= -\gamma_2 x - \nu n_1; & \tilde{\nabla}_x n_2 &= +\mu y; \\ \tilde{\nabla}_y y &= \gamma_2 y - \varepsilon \lambda n_1 - \varepsilon \mu n_2; & \tilde{\nabla}_y n_2 &= -\varepsilon \mu x,\end{aligned}$$

където  $\varepsilon = 1$  в случая, когато  $K - H^2 > 0$ , и  $\varepsilon = -1$  при  $K - H^2 < 0$ .

Геометричният смисъл на каноничната параметризация може да се опише по следния начин: ако  $(u, v)$  са канонични изотропни параметри, тогава каноничните направления  $x = \frac{z_u}{f}$  и  $y = \frac{z_v}{f}$  удовлетворяват равенствата:

$$\begin{aligned}\sigma(x, x) &= -\sigma(y, y), & \text{в случая, когато } K - H^2 > 0; \\ \sigma(x, x) &= \sigma(y, y), & \text{в случая, когато } K - H^2 < 0.\end{aligned}$$

Нещо повече, спрямо каноничните изотропни параметри  $(u, v)$ , функциите  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  се представят чрез функцията  $\mu$  по следния начин:

$$\gamma_1 = -\frac{|\mu|_u}{2\sqrt{|\mu|}}, \quad \gamma_2 = -\frac{|\mu|_v}{2\sqrt{|\mu|}}. \quad (1.71)$$

От условията за интегрируемост (1.69), в случая  $\lambda_1 = \lambda$ ,  $\lambda_2 = -\varepsilon \lambda$ ,  $\mu_1 = \mu$ ,  $\mu_2 = -\varepsilon \mu$ , получаваме

$$\begin{aligned}x(\nu) + y(\lambda) + 2\gamma_2 \lambda &= 0; \\ -\varepsilon x(\lambda) + y(\nu) - \varepsilon 2\gamma_1 \lambda &= 0; \\ x(\gamma_2) + y(\gamma_1) + 2\gamma_1 \gamma_2 - \nu^2 - \varepsilon(\lambda^2 + \mu^2) &= 0.\end{aligned}$$

Като вземем предвид (1.71), от равенствата по-горе получаваме

$$\begin{aligned}\nu_u + \lambda_v &= \lambda(\ln |\mu|)_v; \\ \lambda_u - \varepsilon \nu_v &= \lambda(\ln |\mu|)_u; \\ |\mu|(\ln |\mu|)_{uv} &= -\nu^2 - \varepsilon(\lambda^2 + \mu^2).\end{aligned}$$

И така, чрез въвеждането на канонични параметри за времениподобна повърхнина с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина, можем да редуцираме до три броя на геометричните функции и броя на частните диференциални уравнения от условията за интегрируемост. В § 1.5.3 ще докажем, че тези три функции  $\lambda$ ,  $\mu$  и

$\nu$ , като функции на каноничните параметри, определят повърхнината с точност до движение в  $\mathbb{R}_1^4$ .

### 1.5.2 Повърхнини, удовлетворяващи $K - H^2 = 0$

В този параграф ще разгледаме времеподобни повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина, за които  $K - H^2 = 0$ , т.е.  $\mu_1\mu_2 = 0$ ,  $\mu_1^2 + \mu_2^2 \neq 0$ . Без ограничение на общността, можем да считаме, че  $\mu_1 \neq 0$  и  $\mu_2 = 0$  в подобласт  $\mathcal{D}_0$ . От  $\mu_1\lambda_2 - \lambda_1\mu_2 = 0$  следва, че  $\lambda_2 = 0$ , което означава, че  $K = \nu^2$ . В този случай, деривационните формули имат следния вид:

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_x x &= \gamma_1 x & + \lambda_1 n_1 + \mu_1 n_2; & \tilde{\nabla}_x n_1 = -\nu x + \lambda_1 y; \\ \tilde{\nabla}_x y &= -\gamma_1 y - \nu n_1; & \tilde{\nabla}_y n_1 = -\nu y; \\ \tilde{\nabla}_y x &= -\gamma_2 x - \nu n_1; & \tilde{\nabla}_x n_2 = \mu_1 y; \\ \tilde{\nabla}_y y &= \gamma_2 y; & \tilde{\nabla}_y n_2 = 0.\end{aligned}$$

От условията за интегрируемост (1.69) при  $\mu_2 = 0$  и  $\lambda_2 = 0$  получаваме:

$$\begin{aligned}y(\nu) &= 0; \\ x(\nu) + y(\lambda_1) + 2\gamma_2\lambda_1 &= 0; \\ y(\mu_1) + 2\gamma_2\mu_1 &= 0; \\ x(\gamma_2) + y(\gamma_1) + 2\gamma_1\gamma_2 &= \nu^2.\end{aligned}\tag{1.72}$$

Първото равенство на (1.72) показва, че:

$$\nu = \nu(u),$$

а от третото имаме:

$$y(\ln |\mu_1|) = -2\gamma_2.$$

Като вземем предвид, че  $\gamma_2 = y(\ln f)$ , получаваме, че

$$y(\ln(f^2|\mu_1|)) = 0,$$

което показва, че съществува функция  $\varphi(u) > 0$  такава, че  $f^2|\mu_1| = \varphi(u)$ .

Разглеждаме следната смяна на параметризацията:

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \int_{u_0}^u \varphi(u) du + \bar{u}_0, \quad \bar{u}_0 = \text{const}; \\ \bar{v} &= v + \bar{v}_0, \quad \bar{v}_0 = \text{const}.\end{aligned}$$

При тази смяна на параметрите имаме

$$\begin{aligned}z_{\bar{u}} &= \frac{z_u}{f^2 |\mu_1|}; \\ z_{\bar{v}} &= z_v,\end{aligned}$$

което означава, че

$$\langle z_{\bar{u}}, z_{\bar{u}} \rangle = 0; \quad \langle z_{\bar{u}}, z_{\bar{v}} \rangle = -\frac{1}{|\mu_1|}; \quad \langle z_{\bar{v}}, z_{\bar{v}} \rangle = 0.$$

Следователно,  $(\bar{u}, \bar{v})$  са изотропни параметри, спрямо които метричната функция  $\bar{f}$  има следния вид:

$$\bar{f} = \frac{1}{\sqrt{|\mu_1|}}.$$

Разглеждаме изотропните направления

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{z_{\bar{u}}}{\bar{f}} = \frac{x}{f \sqrt{|\mu_1|}}; \\ \bar{y} &= \frac{z_{\bar{v}}}{\bar{f}} = f \sqrt{|\mu_1|} y.\end{aligned}$$

Тогава, вторият фундаментален тензор  $\sigma$  има следния вид:

$$\begin{aligned}\sigma(\bar{x}, \bar{x}) &= \frac{\lambda_1}{f^2 |\mu_1|} n_1 + \frac{\mu_1}{f^2 |\mu_1|} n_2; \\ \sigma(\bar{x}, \bar{y}) &= -\nu n_1; \\ \sigma(\bar{y}, \bar{y}) &= 0.\end{aligned}$$

Като означим  $\bar{\lambda} = \frac{\lambda_1}{f^2 |\mu_1|}$  и  $\bar{\mu} = \frac{\mu_1}{f^2 |\mu_1|}$ , имаме

$$\begin{aligned}\sigma(\bar{x}, \bar{x}) &= \bar{\lambda} n_1 + \bar{\mu} n_2; \\ \sigma(\bar{x}, \bar{y}) &= -\nu n_1; \\ \sigma(\bar{y}, \bar{y}) &= 0.\end{aligned}$$

Да отбележим, че  $\bar{\mu} = \frac{\varepsilon}{f^2}$ , където  $\varepsilon = \text{sign}(\mu_1)$ . Очевидно,  $\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\mu}} = \frac{\lambda_1}{\mu_1}$ .

И така, в случая  $K - H^2 = 0$ , също можем да въведем канонични изотропни параметри чрез следващата дефиниция.

**Дефиниция 1.5.4.** Нека  $M^2$  е времеподобна повърхнина в  $\mathbb{R}_1^4$  с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина и  $K - H^2 = 0$ . Изотропните параметри  $(u, v)$  се наричат *канонични*, ако метричната функция  $f$  се представя чрез формулата:

$$f(u, v) = \frac{1}{\sqrt{|\mu|}}, \quad \mu \neq 0.$$

Разглежданията, направени по-горе, ни дават следния резултат.

**Твърдение 1.5.5.** *Всяка времеподобна повърхнина с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина, за която  $K - H^2 = 0$ , локално може да се параметризира спрямо канонични параметри.*

От условията за интегрируемост (1.69), в случая  $\lambda_1 = \lambda$ ,  $\lambda_2 = 0$ ,  $\mu_1 = \mu$ ,  $\mu_2 = 0$ , имаме

$$\begin{aligned} x(\nu) + y(\lambda) + 2\gamma_2\lambda &= 0; \\ x(\gamma_2) + y(\gamma_1) + 2\gamma_1\gamma_2 &= \nu^2, \end{aligned}$$

откъдето с помощта на (1.71) получаваме уравненията:

$$\begin{aligned} \nu_u + \lambda_v &= \lambda(\ln |\mu|)_v; \\ |\mu|(\ln |\mu|)_{uv} &= -\nu^2. \end{aligned}$$

Следователно, чрез въвеждането на канонични параметри за времеподобна повърхнина с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина и в случая  $K - H^2 = 0$  можем да редуцираме броя на функциите и броя на частните диференциални уравнения, определящи повърхнината.

### 1.5.3 Фундаментални теореми за времеподобни повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина

В този параграф ще докажем фундаментални теореми за съществуване и единственост за класа на времеподобните повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина, формулирани чрез канонични параметри.

**Теорема 1.5.6.** Нека  $\lambda(u, v)$ ,  $\mu(u, v)$  и  $\nu(u, v)$  са гладки функции,  $\mu \neq 0$ ,  $\nu \neq \text{const}$ , дефинирани в област  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ , и удовлетворяващи условията

$$\begin{aligned}\nu_u + \lambda_v &= \lambda(\ln |\mu|)_v; \\ \lambda_u - \varepsilon \nu_v &= \lambda(\ln |\mu|)_u; \\ |\mu|(\ln |\mu|)_{uv} &= -\nu^2 - \varepsilon(\lambda^2 + \mu^2),\end{aligned}\tag{1.73}$$

където  $\varepsilon = \pm 1$ . Нека  $\{x_0, y_0, (n_1)_0, (n_2)_0\}$  е псевдо-ортонормиран репер в точка  $p_0 \in \mathbb{R}_1^4$ . Тогава, съществува подобласт  $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$  и единствена времениподобна повърхнина  $M^2 : z = z(u, v)$ ,  $(u, v) \in \mathcal{D}_0$  с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина, такава, че  $M^2$  минава през  $p_0$ ,  $\{x_0, y_0, (n_1)_0, (n_2)_0\}$  е геометричният репер на  $M^2$  в точката  $p_0$ , функциите  $\lambda(u, v)$ ,  $\mu(u, v)$ ,  $\nu(u, v)$  са геометричните функции на повърхнината и  $K - H^2 > 0$  при  $\varepsilon = 1$ , съответно  $K - H^2 < 0$  при  $\varepsilon = -1$ . При това,  $(u, v)$  са канонични изотропни параметри на  $M^2$ .

*Доказателство.* Нека  $\gamma_1 = -(\sqrt{|\mu|})_u$ ,  $\gamma_2 = -(\sqrt{|\mu|})_v$  и да разгледаме следната система частни диференциални уравнения за неизвестните векторни функции  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $n_1 = n_1(u, v)$ ,  $n_2 = n_2(u, v)$  в  $\mathbb{R}_1^4$ :

$$\begin{aligned}x_u &= \frac{1}{\sqrt{|\mu|}}(\gamma_1 x + \lambda n_1 + \mu n_2) & x_v &= \frac{1}{\sqrt{|\mu|}}(-\gamma_2 x - \nu n_1) \\ y_u &= \frac{1}{\sqrt{|\mu|}}(-\gamma_1 y - \nu n_1) & y_v &= \frac{1}{\sqrt{|\mu|}}(\gamma_2 y - \varepsilon \lambda n_1 - \varepsilon \mu n_2) \\ (n_1)_u &= \frac{1}{\sqrt{|\mu|}}(-\nu x + \lambda y) & (n_1)_v &= \frac{1}{\sqrt{|\mu|}}(-\varepsilon \lambda x - \nu y) \\ (n_2)_u &= \frac{1}{\sqrt{|\mu|}}(\mu y) & (n_2)_v &= \frac{1}{\sqrt{|\mu|}}(-\varepsilon \mu x)\end{aligned}\tag{1.74}$$

Означаваме

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{A} = \frac{1}{\sqrt{|\mu|}} \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & \lambda & \mu \\ 0 & -\gamma_1 & -\nu & 0 \\ -\nu & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{B} = \frac{1}{\sqrt{|\mu|}} \begin{pmatrix} -\gamma_2 & 0 & -\nu & 0 \\ 0 & \gamma_2 & -\varepsilon \lambda & -\varepsilon \mu \\ -\varepsilon \lambda & -\nu & 0 & 0 \\ -\varepsilon \mu & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и записваме системата (1.74) в матричен вид по следния начин:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_u &= \mathcal{A}\mathcal{F}, \\ \mathcal{F}_v &= \mathcal{B}\mathcal{F}.\end{aligned}\tag{1.75}$$

Условията за интегрируемост на системата (1.75) са  $\mathcal{F}_{uv} = \mathcal{F}_{vu}$ , т.е.

$$\frac{\partial a_i^k}{\partial v} - \frac{\partial b_i^k}{\partial u} + \sum_{j=1}^4 (a_i^j b_j^k - b_i^j a_j^k) = 0, \quad i, k = 1, \dots, 4, \quad (1.76)$$

където чрез  $a_i^j$  и  $b_i^j$  са означени съответно елементите на матриците  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ . Като използваме (1.73), лесно може да се провери, че са в сила равенствата (1.76). Следователно, съществува подобласт  $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}$  и единствени векторни функции  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $n_1 = n_1(u, v)$ ,  $n_2 = n_2(u, v)$ ,  $(u, v) \in \mathcal{D}_1$ , които удовлетворяват системата (1.74) и началните условия:

$$x(u_0, v_0) = x_0, \quad y(u_0, v_0) = y_0, \quad n_1(u_0, v_0) = (n_1)_0, \quad n_2(u_0, v_0) = (n_2)_0.$$

За да проверим, че  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $n_1(u, v)$  и  $n_2(u, v)$  образуват псевдо-ортонормиран репер в  $\mathbb{R}_1^4$  за всяко  $(u, v) \in \mathcal{D}_1$ , разглеждаме следните функции:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \langle x, x \rangle; & \varphi_5 &= \langle x, y \rangle + 1; & \varphi_8 &= \langle y, n_1 \rangle; \\ \varphi_2 &= \langle y, y \rangle; & \varphi_6 &= \langle x, n_1 \rangle; & \varphi_9 &= \langle y, n_2 \rangle; \\ \varphi_3 &= \langle n_1, n_1 \rangle - 1; & \varphi_7 &= \langle x, n_2 \rangle; & \varphi_{10} &= \langle n_1, n_2 \rangle; \\ \varphi_4 &= \langle n_2, n_2 \rangle - 1; \end{aligned}$$

дефинирани за  $(u, v) \in \mathcal{D}_1$ . Като вземем предвид, че  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $n_1(u, v)$ ,  $n_2(u, v)$  удовлетворяват (1.74), получаваме системата

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i}{\partial u} &= p_i^j \varphi_j, \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial v} &= q_i^j \varphi_j; \end{aligned} \quad i = 1, \dots, 10, \quad (1.77)$$

където  $p_i^j, q_i^j$ ,  $i, j = 1, \dots, 10$  са функции на  $(u, v) \in \mathcal{D}_1$ . Системата (1.77) е линейна система от частни диференциални уравнения за функциите  $\varphi_i(u, v)$ , удовлетворяващи условията  $\varphi_i(u_0, v_0) = 0$  за всяко  $i = 1, \dots, 10$ , тъй като  $\{x_0, y_0, (n_1)_0, (n_2)_0\}$  е псевдо-ортонормиран репер. Следователно,  $\varphi_i(u, v) = 0$ ,  $i = 1, \dots, 10$  за всяко  $(u, v) \in \mathcal{D}_1$ . И така, векторните функции  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $n_1(u, v)$ ,  $n_2(u, v)$  образуват псевдо-ортонормиран репер в  $\mathbb{R}_1^4$  за всяко  $(u, v) \in \mathcal{D}_1$ .

Разглеждаме следната система от частни диференциални уравнения за вектор-

ната функция  $z(u, v)$ :

$$\begin{aligned} z_u &= \frac{1}{\sqrt{|\mu|}} x \\ z_v &= \frac{1}{\sqrt{|\mu|}} y \end{aligned} \quad (1.78)$$

От равенствата (1.73) и (1.74) следва, че условията за интегрируемост  $z_{uv} = z_{vu}$  на системата (1.78) са изпълнени. Следователно, съществува подобласт  $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_1$  и единична векторна функция  $z = z(u, v)$ , дефинирана за  $(u, v) \in \mathcal{D}_0$  и удовлетворяваща  $z(u_0, v_0) = p_0$ .

Сега ще разгледаме повърхнината  $M^2 : z = z(u, v)$ ,  $(u, v) \in \mathcal{D}_0$ . Очевидно,  $M^2$  е времениподобна повърхнина в  $\mathbb{R}_1^4$ . От (1.74) следва, че  $M^2$  е с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина, понеже  $H = \nu n_1$ ;  $D_x n_1 = 0$  и  $D_y n_1 = 0$ . Освен това, тъй като  $\langle z_u, z_v \rangle = -\frac{1}{|\mu|}$  и метричната функция е  $f = \frac{1}{\sqrt{|\mu|}}$ , то  $(u, v)$  са канонични изотропни параметри за  $M^2$ .

□

**Теорема 1.5.7.** Нека  $\lambda(u, v)$ ,  $\mu(u, v)$  и  $\nu(u)$  са гладки функции,  $\mu \neq 0$ ,  $\nu \neq \text{const}$ , дефинирани в област  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ , и удовлетворяващи условията

$$\begin{aligned} \nu_u + \lambda_v &= \lambda(\ln |\mu|)_v; \\ |\mu| (\ln |\mu|)_{uv} &= -\nu^2. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Нека  $\{x_0, y_0, (n_1)_0, (n_2)_0\}$  е псевдо-ортонормиран репер в точка  $p_0 \in \mathbb{R}_1^4$ . Тогава, съществува подобласт  $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$  и единствена времениподобна повърхнина  $M^2 : z = z(u, v)$ ,  $(u, v) \in \mathcal{D}_0$  с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина, такава че  $M^2$  минава през  $p_0$ ,  $\{x_0, y_0, (n_1)_0, (n_2)_0\}$  е геометричният репер на  $M^2$  в точката  $p_0$ , функциите  $\lambda(u, v)$ ,  $\mu(u, v)$ ,  $\nu(u)$  са геометричните функции на повърхнината и  $K - H^2 = 0$ . При това,  $(u, v)$  са канонични изотропни параметри на  $M^2$ .

*Доказателство.* Разглеждаме следната система от частни диференциални уравнения за неизвестните векторни функции  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $n_1 = n_1(u, v)$ ,  $n_2 =$



$n_2(u, v)$  в  $\mathbb{R}_1^4$ :

$$\begin{aligned}
 x_u &= \frac{1}{\sqrt{|\mu|}} (\gamma_1 x + \lambda n_1 + \mu n_2) & x_v &= \frac{1}{\sqrt{|\mu|}} (-\gamma_2 x - \nu n_1) \\
 y_u &= \frac{1}{\sqrt{|\mu|}} (-\gamma_1 y - \nu n_1) & y_v &= \frac{1}{\sqrt{|\mu|}} (\gamma_2 y) \\
 (n_1)_u &= \frac{1}{\sqrt{|\mu|}} (-\nu x + \lambda y) & (n_1)_v &= \frac{1}{\sqrt{|\mu|}} (-\nu y) \\
 (n_2)_u &= \frac{1}{\sqrt{|\mu|}} (\mu y) & (n_2)_v &= 0
 \end{aligned} \tag{1.80}$$

където  $\gamma_1 = -(\sqrt{|\mu|})_u$  и  $\gamma_2 = -(\sqrt{|\mu|})_v$ . От равенства (1.79) следва, че условията за интегрируемост на системата (1.80) са изпълнени. По-нататък доказателството следва стъпките на доказателството на Теорема 1.5.6.  $\square$

**Забележка 1.5.8.** За времеподобните повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина можем да разгледаме също и канонични неизотропни параметри, които в случая  $K - H^2 > 0$  имат същия геометричен смисъл като каноничните параметри на пространственоподобни повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина в  $\mathbb{R}_1^4$  и  $\mathbb{R}^4$ .

## Глава 2

# Времениподобни повърхнини от ротационен тип

### 2.1 Времениподобни обобщени ротационни повърхнини в $\mathbb{R}_1^4$

Обобщени ротационни повърхнини в четиримерното Евклидово пространство  $\mathbb{R}^4$  са разглеждани от С. Мооре [56], [57] и F. Cole [28]. Те се дефинират по следния начин. Нека  $c : x(u) = (x^1(u), x^2(u), x^3(u), x^4(u))$ ;  $u \in J \subset \mathbb{R}$  е гладка крива в  $\mathbb{R}^4$ , и  $\alpha, \beta$  са константи. Обобщена ротационна повърхнина, породена от кривата  $c$  в  $\mathbb{R}^4$  се дефинира чрез

$$Z(u, v) = (Z^1(u, v), Z^2(u, v), Z^3(u, v), Z^4(u, v)),$$

където

$$\begin{aligned} Z^1(u, v) &= x^1(u) \cos \alpha v - x^2(u) \sin \alpha v; & Z^3(u, v) &= x^3(u) \cos \beta v - x^4(u) \sin \beta v; \\ Z^2(u, v) &= x^1(u) \sin \alpha v + x^2(u) \cos \alpha v; & Z^4(u, v) &= x^3(u) \sin \beta v + x^4(u) \cos \beta v. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Кривата  $c : x(u) = (x^1(u), x^2(u), x^3(u), x^4(u))$  играе ролята на меридиан. В частния случай, когато  $\beta = 0$ ,  $x^2(u) = 0$ , равнината  $Oe_3e_4$  е фиксирана и (2.1) задава класическа ротационна повърхнина с фиксирана двумерна ос в четиримерното пространство.

В [54] се разглеждат повърхнини, зададени по следния начин

$$\mathcal{M} : z(u, v) = (f(u) \cos \alpha v, f(u) \sin \alpha v, g(u) \cos \beta v, g(u) \sin \beta v), \quad (2.2)$$

където  $u \in J \subset \mathbb{R}$ ,  $v \in [0; 2\pi)$ ,  $f(u)$  и  $g(u)$  са гладки функции, удовлетворяващи неравенствата  $\alpha^2 f^2(u) + \beta^2 g^2(u) > 0$ ,  $f'^2(u) + g'^2(u) > 0$ , и  $\alpha, \beta$  са положителни константи. В случая, когато  $\alpha \neq \beta$ , всяка параметрична крива  $u = \text{const}$  е крива

в  $\mathbb{R}^4$  с постоянни кривини на Френе, а в случая когато  $\alpha = \beta$  всяка параметрична крива  $u = \text{const}$  е окръжност. Параметричните криви  $v = \text{const}$  са равнинни криви с кривини на Френе  $\frac{|g'f'' - f'g''|}{(\sqrt{f'^2 + g'^2})^3}$ . Тези криви са меридианните криви за  $\mathcal{M}$ .

Повърхнините, дефинирани чрез (2.2), са обобщени ротационни повърхнини с равнинни меридианни криви в смисъла на С. Мооре. В [54] са намерени основните инварианти на тези повърхнини и е направена пълна класификация на минималните супер-конформни<sup>1</sup> обобщени ротационни повърхнини в  $\mathbb{R}^4$ .

Аналогично на обобщените ротационни повърхнини в  $\mathbb{R}^4$  могат да бъдат разглеждани и обобщени ротационни повърхнини в 4-мерното пространство на Минковски  $\mathbb{R}_1^4$ . Те се дефинират по следния начин. Нека  $c : x(u) = (x^1(u), x^2(u), x^3(u), x^4(u))$ ;  $u \in J \subset \mathbb{R}$  е гладка пространственоподобна или времениподобна крива в  $\mathbb{R}_1^4$ , и  $\alpha, \beta$  са константи. Разглеждаме повърхнината, дефинирана чрез

$$Z(u, v) = (Z^1(u, v), Z^2(u, v), Z^3(u, v), Z^4(u, v)),$$

където

$$\begin{aligned} Z^1(u, v) &= x^1(u) \cos \alpha v - x^2(u) \sin \alpha v; & Z^3(u, v) &= x^3(u) \cosh \beta v + x^4(u) \sinh \beta v; \\ Z^2(u, v) &= x^1(u) \sin \alpha v + x^2(u) \cos \alpha v; & Z^4(u, v) &= x^3(u) \sinh \beta v + x^4(u) \cosh \beta v. \end{aligned}$$

В случая, когато  $\beta = 0$ ,  $x^2(u) = 0$  (или  $x^1(u) = 0$ ) се получават класическите ротационни повърхнини от елиптичен тип в  $\mathbb{R}_1^4$ . Локалната класификация на пространственоподобни повърхнини от елиптичен тип, за които векторното поле на средната кривина е нулево или изотропно, е дадена в [45]. Пространственоподобни ротационни повърхнини с постоянна средна кривина са изучавани в [6] по отношение на Гаусовото изображение.

В случая когато,  $\alpha = 0$ ,  $x^3(u) = 0$  се получават класическите хиперболични ротационни повърхнини от първи тип, а в случая, когато  $\alpha = 0$ ,  $x^4(u) = 0$  се получават класическите хиперболични ротационни повърхнини от втори тип. Локалната класификация на пространственоподобни повърхнини от хиперболичен тип, за които векторното поле на средната кривина е нулево или изотропно, е направена в [44]. В [51] са класифицирани времениподобните и пространственоподобните хиперболични ротационни повърхнини с ненулево постоянно векторно поле на средната кривина в тримерно пространство на де Ситер (de Sitter)  $\mathbb{S}_1^3$ . Класификацията на пространственоподобни и времениподобни Вайнгартенови ротационни повърхнини в  $\mathbb{S}_1^3$  е дадена в [52]. В [34] са описани пространственоподобни ротационни повърхнини от хипербо-

<sup>1</sup>Една повърхнина  $M^2$  в  $\mathbb{R}^4$  се нарича супер-конформна, ако във всяка точка  $p \in M^2$  елипсата на нормалната кривина, зададена чрез  $\{\sigma(x, x) : x \in T_p M^2, \langle x, x \rangle = 1\}$ , е окръжност.

личен или елиптически тип в  $\mathbb{R}_1^4$ , за които присъединеното векторно поле на средната кривина е тъждествено равно на нула. Пространственоподобни и времениподобни ротационни повърхнини от елиптически, хиперболически и параболически тип, чието Гаусово изображение е от тип 1 са изучавани в [3] и [29].

В общия случай, когато  $\alpha > 0$  и  $\beta > 0$ , повърхнината, дефинирана по-горе, е аналогът на обобщените ротационни повърхнини на С. Мооре в  $\mathbb{R}^4$ .

В [35] и [43] Г. Ганчев и В. Милушева разглеждат пространственоподобни обобщени ротационни повърхнини с равнинни меридианни криви в пространство на Минковски  $\mathbb{R}_1^4$  и дават аналитично описание на някои основни техни геометрични подкласове. Обобщени ротационни повърхнини в псевдо-Евклидово 4-мерно пространство с неутрална метрика са изучавани в [1].

В настоящия параграф ще разгледаме два типа времениподобни обобщени ротационни повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$  – с времениподобна и с пространственоподобна меридианна крива.

### 2.1.1 Обобщени ротационни повърхнини от първи тип

Нека  $\mathcal{M}_1$  е повърхнина в  $\mathbb{R}_1^4$ , параметризирана чрез

$$\mathcal{M}_1 : z(u, v) = (f(u) \cos \alpha v, f(u) \sin \alpha v, g(u) \sinh \beta v, g(u) \cosh \beta v), \quad (2.3)$$

където  $u \in J \subset \mathbb{R}$ ,  $v \in [0; 2\pi)$ ,  $f(u)$  и  $g(u)$  са гладки функции, удовлетворяващи условията  $f(u)g'(u) - g(u)f'(u) \neq 0$ ,  $f'^2(u) - g'^2(u) < 0$ ,  $\alpha^2 f^2(u) + \beta^2 g^2(u) > 0$ , и  $\alpha, \beta$  са положителни константи.

За частните производни на  $z(u, v)$  имаме:

$$\begin{aligned} z_u &= (f' \cos \alpha v, f' \sin \alpha v, g' \sinh \beta v, g' \cosh \beta v); \\ z_v &= (-\alpha f \sin \alpha v, \alpha f \cos \alpha v, \beta g \cosh \beta v, \beta g \sinh \beta v), \end{aligned}$$

откъдето получаваме, че коефициентите на първата основна форма на  $\mathcal{M}_1$  се изразяват чрез функциите  $f$  и  $g$  по следния начин:

$$\begin{aligned} E &= \langle z_u, z_u \rangle = f'^2 - g'^2; \\ F &= \langle z_u, z_v \rangle = 0; \\ G &= \langle z_v, z_v \rangle = \alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2 \end{aligned}$$

и  $W = \sqrt{|EG - F^2|} = \sqrt{(g'^2 - f'^2)(\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2)}$ . Очевидно,  $\mathcal{M}_1$  е времениподобна повърхнина в  $\mathbb{R}_1^4$  понеже  $E < 0$ ,  $G > 0$ .  $\mathcal{M}_1$  ще наричаме *времяподобна обобщена ротационна повърхнина от първи тип*. Нейната меридианна крива  $c : x(u) = (f(u), 0, 0, g(u))$  е времениподобна. По-нататък ще намерим основните инварианти на повърхнината и ще опишем някои основни класове обобщени ротационни повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$ .

Разглеждаме следния ортонормиран базис на нормалното пространство  $N_p \mathcal{M}_1$  на  $\mathcal{M}_1$ :

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2}} (\beta g \sin \alpha v, -\beta g \cos \alpha v, \alpha f \cosh \beta v, \alpha f \sinh \beta v), \\ n_2 &= \frac{1}{\sqrt{g'^2 - f'^2}} (g' \cos \alpha v, g' \sin \alpha v, f' \sinh \beta v, f' \cosh \beta v) \end{aligned} \quad (2.4)$$

и ортонормиран базис на допирателното пространство  $T_p \mathcal{M}_1$  на  $\mathcal{M}_1$ :

$$\begin{aligned} x &= \frac{z_u}{\sqrt{-E}} = \frac{1}{\sqrt{g'^2 - f'^2}} (f' \cos \alpha v, f' \sin \alpha v, g' \sinh \beta v, g' \cosh \beta v), \\ y &= \frac{z_v}{\sqrt{G}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2}} (-\alpha f \sin \alpha v, \alpha f \cos \alpha v, \beta g \cosh \beta v, \beta g \sinh \beta v). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Лесно се проверява, че четворката  $\{x, y, n_1, n_2\}$  е положително ориентирана. Наистина, спрямо метриката в  $\mathbb{R}_1^4$  за базисните векторни полета на повърхнината имаме:

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &= \frac{1}{-E} \langle z_u, z_u \rangle = -1; & \langle n_1, n_1 \rangle &= 1; \\ \langle x, y \rangle &= \frac{1}{\sqrt{-EG}} \langle z_u, z_v \rangle = 0; & \langle n_1, n_2 \rangle &= 0; \\ \langle y, y \rangle &= \frac{1}{G} \langle z_v, z_v \rangle = 1; & \langle n_2, n_2 \rangle &= 1. \end{aligned}$$

Изчисляваме вторите частни производни за  $z(u, v)$ , за да намерим коефициентите на втората основна форма на повърхнината.

$$\begin{aligned} z_{uu} &= (f'' \cos \alpha v, f'' \sin \alpha v, g'' \sinh \beta v, g'' \cosh \beta v); \\ z_{uv} &= (-\alpha f' \sin \alpha v, \alpha f' \cos \alpha v, \beta g' \cosh \beta v, \beta g' \sinh \beta v); \\ z_{vv} &= (-\alpha^2 f \cos \alpha v, -\alpha^2 f \sin \alpha v, \beta^2 g \sinh \beta v, \beta^2 g \cosh \beta v). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Като използваме формулите (2.4), (2.5) и (2.6), получаваме:

$$\begin{aligned} c_{11}^1 &= \langle z_{uu}, n_1 \rangle = 0; \\ c_{12}^1 &= \langle z_{uv}, n_1 \rangle = \frac{\alpha\beta(fg' - f'g)}{\sqrt{\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2}}; \\ c_{22}^1 &= \langle z_{vv}, n_1 \rangle = 0; \\ c_{11}^2 &= \langle z_{uu}, n_2 \rangle = \frac{(f''g' - f'g'')}{\sqrt{g'^2 - f'^2}}; \\ c_{12}^2 &= \langle z_{uv}, n_2 \rangle = 0; \\ c_{22}^2 &= \langle z_{vv}, n_2 \rangle = \frac{-(\alpha^2 fg' + \beta^2 f'g)}{\sqrt{g'^2 - f'^2}}. \end{aligned}$$

Следователно, матрицата  $\mathcal{C} = (c_{ij}^k)$  има вида:

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{(f''g' - f'g'')}{\sqrt{g'^2 - f'^2}} \\ \frac{\alpha\beta(fg' - f'g)}{\sqrt{\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2}} & 0 \\ 0 & \frac{-(\alpha^2 fg' + \beta^2 f'g)}{\sqrt{g'^2 - f'^2}} \end{pmatrix}.$$

За получаване на коефициентите на втората основна форма пресмятаме:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 0 & \frac{(f''g' - f'g'')}{\sqrt{g'^2 - f'^2}} \\ \frac{\alpha\beta(fg' - f'g)}{\sqrt{\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2}} & 0 \end{vmatrix} = \frac{-\alpha\beta(f''g' - f'g'')(fg' - f'g)}{\sqrt{(g'^2 - f'^2)(\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2)}}; \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 0 & \frac{(f''g' - f'g'')}{\sqrt{g'^2 - f'^2}} \\ 0 & \frac{-(\alpha^2 fg' + \beta^2 f'g)}{\sqrt{g'^2 - f'^2}} \end{vmatrix} = 0; \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} \frac{\alpha\beta(fg' - f'g)}{\sqrt{\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2}} & 0 \\ 0 & \frac{-(\alpha^2 fg' + \beta^2 f'g)}{\sqrt{g'^2 - f'^2}} \end{vmatrix} = \frac{-\alpha\beta(fg' - f'g)(\alpha^2 fg' + \beta^2 f'g)}{\sqrt{(g'^2 - f'^2)(\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2)}}. \end{aligned}$$

Тогава, коефициентите  $L$ ,  $M$  и  $N$  се изразяват чрез функциите  $f$  и  $g$  по следния

начин:

$$\begin{aligned} L &= \frac{2\Delta_1}{W} = \frac{2\alpha\beta(f''g' - f'g'')(fg' - f'g)}{(g'^2 - f'^2)(\alpha^2f^2 + \beta^2g^2)}, \\ M &= \frac{\Delta_2}{W} = 0; \\ N &= \frac{2\Delta_3}{W} = \frac{2\alpha\beta(f'g - fg')(\alpha^2fg' + \beta^2f'g)}{(g'^2 - f'^2)(\alpha^2f^2 + \beta^2g^2)}. \end{aligned}$$

С помощта на получените изрази по-горе пресмятаме инвариантите  $k$  и  $\varkappa$  за повърхнината  $\mathcal{M}_1$ :

$$k = \frac{4\alpha^2\beta^2(f''g' - f'g'')(fg' - f'g)^2(\alpha^2fg' + \beta^2f'g)}{(f'^2 - g'^2)^3(\alpha^2f^2 + \beta^2g^2)^3}. \quad (2.7)$$

$$\varkappa = \frac{\alpha\beta(fg' - f'g)\left[(f'^2 - g'^2)(\alpha^2fg' + \beta^2f'g) + (f''g' - f'g'')(\alpha^2f^2 + \beta^2g^2)\right]}{(f'^2 - g'^2)^2(\alpha^2f^2 + \beta^2g^2)^2}. \quad (2.8)$$

За втория фундаментален тензор  $\sigma$  имаме:

$$\begin{aligned} \sigma(z_u, z_u) &= \frac{(f''g' - f'g'')}{\sqrt{g'^2 - f'^2}} n_2; \\ \sigma(z_u, z_v) &= \frac{\alpha\beta(fg' - f'g)}{\sqrt{\alpha^2f^2 + \beta^2g^2}} n_1; \\ \sigma(z_v, z_v) &= \frac{-(\alpha^2fg' + \beta^2f'g)}{\sqrt{g'^2 - f'^2}} n_2, \end{aligned}$$

откъдето намираме:

$$\begin{aligned} \sigma(x, x) &= \sigma\left(\frac{z_u}{\sqrt{-E}}, \frac{z_u}{\sqrt{-E}}\right) = \frac{(f''g' - f'g'')}{(g'^2 - f'^2)\sqrt{g'^2 - f'^2}} n_2; \\ \sigma(x, y) &= \sigma\left(\frac{z_u}{\sqrt{-E}}, \frac{z_v}{\sqrt{G}}\right) = \frac{\alpha\beta(fg' - f'g)}{(\alpha^2f^2 + \beta^2g^2)\sqrt{(g'^2 - f'^2)}} n_1; \\ \sigma(y, y) &= \sigma\left(\frac{z_v}{\sqrt{G}}, \frac{z_v}{\sqrt{G}}\right) = \frac{-(\alpha^2fg' + \beta^2f'g)}{(\alpha^2f^2 + \beta^2g^2)\sqrt{g'^2 - f'^2}} n_2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Следователно, като използваме (2.9) и (1.1), получаваме Гаусовата кривина  $K$  на повърхнината  $\mathcal{M}_1$ :

$$\begin{aligned} K &= \frac{-\alpha^2\beta^2(fg' - f'g)^2}{(f'^2 - g'^2)(\alpha^2f^2 + \beta^2g^2)^2} + \frac{(f''g' - f'g'')(\alpha^2fg' + \beta^2f'g)}{(f'^2 - g'^2)^2(\alpha^2f^2 + \beta^2g^2)}, \quad \text{т.е.} \\ K &= \frac{(f''g' - f'g'')(\alpha^2fg' + \beta^2f'g)(\alpha^2f^2 + \beta^2g^2) - \alpha^2\beta^2(fg' - f'g)^2(f'^2 - g'^2)}{(f'^2 - g'^2)^2(\alpha^2f^2 + \beta^2g^2)^2}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

За векторното поле на средната кривина  $H = \frac{1}{2}(-\sigma(x, x) + \sigma(y, y))$ , получаваме:

$$H = \frac{(f'g'' - f''g')(\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2) + (\alpha^2 f g' + \beta^2 f' g)(f'^2 - g'^2)}{2(\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2)(\sqrt{g'^2 - f'^2})^3} n_2. \quad (2.11)$$

За повърхнината  $\mathcal{M}_1$  проверяваме дали изображението на Вайнгартен е диагонализируемо. За целта пресмятаме:

$$\kappa^2 - k = \frac{\alpha^2 \beta^2 (f g' - f' g)^2 \left[ (f'^2 - g'^2)(\alpha^2 f g' + \beta^2 f' g) - (f'' g' - f' g'')(\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2) \right]^2}{(f'^2 - g'^2)^4 (\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2)^4}.$$

Очевидно, изразът по-горе винаги е по-голям от нула и следователно, повърхнината  $\mathcal{M}_1$  може да се параметризира спрямо главните линии. Тогава, можем да въведем геометричен репер  $\{X, Y, N_1, N_2\}$ , определен от главните направления, и да запишем деривационни формули от вида (1.21) за геометричния репер. От (2.11) следва, че векторното поле на средната кривина  $H$  е колинеарно на  $n_2$ . Тогава единичното нормално векторно поле  $N_1$  във формули (1.21) ще бъде  $N_1 = n_2$ , а единичното нормално векторно поле  $N_2$  във формули (1.21) ще бъде  $N_2 = n_1$ .

За функциите  $\gamma_1, \gamma_2$ , определени от геометричния репер чрез равенствата:

$$\gamma_1 = y(\ln \sqrt{-E}), \quad \gamma_2 = -x(\ln \sqrt{G}),$$

пресмятаме:

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = \frac{-(\alpha^2 f f' + \beta^2 g g')}{(\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2) \sqrt{g'^2 - f'^2}}.$$

За пресмятането на останалите функции  $\nu_1, \nu_2, \lambda, \mu, \beta_1, \beta_2$  намираме последователно:

$$\tilde{\nabla}_x x = \frac{-1}{E} z_{uu} + \frac{E_u}{2E^2} z_u,$$

откъдето за  $\nu_1$  получаваме:

$$\nu_1 = \langle \tilde{\nabla}_x x, N_1 \rangle = \frac{f'' g' - f' g''}{(\sqrt{g'^2 - f'^2})^3}.$$

Пресмятаме

$$\tilde{\nabla}_y y = \frac{1}{G} z_{vv} + \frac{-G_v}{2G^2} z_v,$$

откъдето следва, че  $\nu_2$  се изразява по следния начин:

$$\nu_2 = \langle \tilde{\nabla}_y y, N_1 \rangle = \frac{-(\alpha^2 f g' + \beta^2 g f')}{(\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2)(\sqrt{g'^2 - f'^2})}.$$



От

$$\tilde{\nabla}_x y = \frac{1}{\sqrt{-EG}} z_{uv} + \frac{1}{\sqrt{-E}} \left( \frac{1}{\sqrt{G}} \right)_u z_v,$$

намираме функциите  $\lambda$  и  $\mu$ :

$$\lambda = \langle \tilde{\nabla}_x y, N_1 \rangle = 0, \quad \mu = \langle \tilde{\nabla}_x y, N_2 \rangle = \frac{\alpha\beta(fg' - gf')}{(\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2)\sqrt{g'^2 - f'^2}}.$$

От  $\tilde{\nabla}_x N_2 = \frac{1}{\sqrt{-E}} \tilde{\nabla}_{z_u} N_2$  след диференциране намираме

$$\beta_1 = 0.$$

От  $\tilde{\nabla}_y N_2 = \frac{1}{\sqrt{G}} \tilde{\nabla}_{z_v} N_2$  след диференциране получаваме

$$\beta_2 = \frac{\alpha\beta(gg' - ff')}{(\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2)\sqrt{g'^2 - f'^2}}.$$

И така, функциите  $\gamma_1, \gamma_2, \nu_1, \nu_2, \lambda, \mu, \beta_1, \beta_2$ , определени от геометричния репер  $\{X, Y, N_1, N_2\}$  за повърхнината  $\mathcal{M}_1$ , се изразяват чрез функциите  $f$  и  $g$  по следните формули:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 0; & \gamma_2 &= \frac{-(\alpha^2 f f' + \beta^2 g g')}{(\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2)\sqrt{g'^2 - f'^2}}; \\ \nu_1 &= \frac{f'' g' - f' g''}{(\sqrt{g'^2 - f'^2})^3}; & \nu_2 &= \frac{-(\alpha^2 f g' + \beta^2 g f')}{(\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2)(\sqrt{g'^2 - f'^2})}; \\ \lambda &= 0; & \mu &= \frac{\alpha\beta(fg' - gf')}{(\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2)\sqrt{g'^2 - f'^2}}; \\ \beta_1 &= 0; & \beta_2 &= \frac{\alpha\beta(gg' - ff')}{(\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2)\sqrt{g'^2 - f'^2}}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

### 2.1.2 Обобщени ротационни повърхнини от втори тип

По аналогичен начин разглеждаме повърхнината  $\mathcal{M}_2$  в  $\mathbb{R}_1^4$ , параметризирана чрез

$$\mathcal{M}_2 : z(u, v) = (f(u) \cos \alpha v, f(u) \sin \alpha v, g(u) \cosh \beta v, g(u) \sinh \beta v), \tag{2.13}$$

където  $u \in J$ ,  $v \in [0; 2\pi)$ ,  $f(u)$  и  $g(u)$  са гладки функции, удовлетворяващи неравенствата  $f(u)g'(u) - g(u)f'(u) \neq 0$ ,  $\alpha^2 f^2(u) - \beta^2 g^2(u) < 0$ ,  $f'^2(u) + g'^2(u) > 0$ , и  $\alpha, \beta$  са положителни константи.

За частните производни на  $z(u, v)$  имаме:

$$\begin{aligned} z_u &= (f' \cos \alpha v, f' \sin \alpha v, g' \cosh \beta v, g' \sinh \beta v); \\ z_v &= (-\alpha f \sin \alpha v, \alpha f \cos \alpha v, \beta g \sinh \beta v, \beta g \cosh \beta v). \end{aligned}$$

Следователно, коефициентите на първа основна форма на  $\mathcal{M}_2$  са

$$\begin{aligned} E &= \langle z_u, z_u \rangle = f'^2 + g'^2; \\ F &= \langle z_u, z_v \rangle = 0; \\ G &= \langle z_v, z_v \rangle = \alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2 \end{aligned}$$

и  $W = \sqrt{|EG - F^2|} = \sqrt{(f'^2 + g'^2)(\beta^2 g^2 - \alpha^2 f^2)}$ .

Очевидно,  $\mathcal{M}_2$  е времениподобна повърхнина в  $\mathbb{R}_1^4$  понеже  $E > 0$ ,  $G < 0$ . Меридианната крива  $c : x(u) = (f(u), 0, 0, g(u))$  е пространственоподобна.  $\mathcal{M}_2$  наричаме *времяподобна обобщена ротационна повърхнина от втори тип*. Отново целта ни е да намерим основните инварианти за повърхнината, чрез които ще направим класифициране на някои основни класове обобщени ротационни повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$ .

Разглеждаме следния ортонормиран базис на нормалното пространство  $N_p \mathcal{M}_2$  на  $\mathcal{M}_2$ :

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{1}{\sqrt{f'^2 + g'^2}} (g' \cos \alpha v, g' \sin \alpha v, -f' \cosh \beta v, -f' \sinh \beta v); \\ n_2 &= \frac{1}{\sqrt{\beta^2 g^2 - \alpha^2 f^2}} (-\beta g \sin \alpha v, \beta g \cos \alpha v, \alpha f \sinh \beta v, \alpha f \cosh \beta v). \end{aligned} \tag{2.14}$$

и ортонормирания базис на допирателното пространство  $T_p \mathcal{M}_2$  на  $\mathcal{M}_2$ :

$$\begin{aligned} x &= \frac{z_u}{\sqrt{E}} = \frac{1}{\sqrt{f'^2 + g'^2}} (f' \cos \alpha v, f' \sin \alpha v, g' \cosh \beta v, g' \sinh \beta v); \\ y &= \frac{z_v}{\sqrt{-G}} = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 g^2 - \alpha^2 f^2}} (-\alpha f \sin \alpha v, \alpha f \cos \alpha v, \beta g \sinh \beta v, \beta g \cosh \beta v). \end{aligned}$$

Четворката  $\{x, y, n_1, n_2\}$  е положително ориентирана. Наистина,

$$\begin{aligned}\langle x, x \rangle &= \frac{1}{E} \langle z_u, z_u \rangle = 1; & \langle n_1, n_1 \rangle &= 1; \\ \langle x, y \rangle &= \frac{1}{\sqrt{-EG}} \langle z_u, z_v \rangle = 0; & \langle n_1, n_2 \rangle &= 0; \\ \langle y, y \rangle &= \frac{1}{-G} \langle z_v, z_v \rangle = \frac{G}{-G} = -1; & \langle n_2, n_2 \rangle &= 1.\end{aligned}$$

Пресмятаме вторите частни производни на  $z(u, v)$ :

$$\begin{aligned}z_{uu} &= (f'' \cos \alpha v, f'' \sin \alpha v, g'' \cosh \beta v, g'' \sinh \beta v); \\ z_{uv} &= (-\alpha f' \sin \alpha v, \alpha f' \cos \alpha v, \beta g' \sinh \beta v, \beta g' \cosh \beta v); \\ z_{vv} &= (-\alpha^2 f \cos \alpha v, -\alpha^2 f \sin \alpha v, \beta^2 g \cosh \beta v, \beta^2 g \sinh \beta v).\end{aligned}$$

Функциите  $c_{ij}^k, i, j, k = 1, 2$  имат вида:

$$\begin{aligned}c_{11}^1 &= \langle z_{uu}, n_1 \rangle = \frac{(f'' g' - f' g'')}{\sqrt{f'^2 + g'^2}}; \\ c_{12}^1 &= \langle z_{uv}, n_1 \rangle = 0; \\ c_{22}^1 &= \langle z_{vv}, n_1 \rangle = \frac{-(\alpha^2 f g' + \beta^2 g f')}{\sqrt{f'^2 + g'^2}}; \\ c_{11}^2 &= \langle z_{uu}, n_2 \rangle = 0; \\ c_{12}^2 &= \langle z_{uv}, n_2 \rangle = \frac{\alpha \beta (f' g - f g')}{\sqrt{\beta^2 g^2 - \alpha^2 f^2}}; \\ c_{22}^2 &= \langle z_{vv}, n_2 \rangle = 0.\end{aligned}$$

Следователно, матрицата  $\mathcal{C} = (c_{ij}^k)$  е:

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} \frac{(f'' g' - f' g'')}{\sqrt{f'^2 + g'^2}} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha \beta (f' g - f g')}{\sqrt{\beta^2 g^2 - \alpha^2 f^2}} \\ \frac{-(\alpha^2 f g' + \beta^2 g f')}{\sqrt{f'^2 + g'^2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Пресмятаме:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \frac{\alpha\beta(f''g' - f'g'')(f'g - fg')}{\sqrt{(f'^2 + g'^2)(\beta^2g^2 - \alpha^2f^2)}}; \\ \Delta_2 &= 0; \\ \Delta_3 &= \frac{\alpha\beta(f'g - fg')(\alpha^2fg' + \beta^2gf')}{\sqrt{(f'^2 + g'^2)(\beta^2g^2 - \alpha^2f^2)}};\end{aligned}$$

и намираме коефициентите на втората основна форма:

$$\begin{aligned}L &= \frac{2\alpha\beta(f''g' - f'g'')(f'g - fg')}{(f'^2 + g'^2)(\beta^2g^2 - \alpha^2f^2)}; \\ M &= 0; \\ N &= \frac{2\alpha\beta(f'g - fg')(\alpha^2fg' + \beta^2gf')}{(f'^2 + g'^2)(\beta^2g^2 - \alpha^2f^2)}.\end{aligned}$$

За инвариантите  $k$  и  $\varkappa$  на  $\mathcal{M}_2$  получаваме:

$$k = \frac{4\alpha^2\beta^2(f''g' - f'g'')(f'g - fg')^2(\alpha^2fg' + \beta^2gf')}{(f'^2 + g'^2)^3(\alpha^2f^2 - \beta^2g^2)^3}, \quad (2.15)$$

$$\varkappa = \frac{\alpha\beta(fg' - f'g)\left[(f'^2 + g'^2)(\alpha^2fg' + \beta^2gf') + (f''g' - f'g'')(\alpha^2f^2 - \beta^2g^2)\right]}{(f'^2 + g'^2)^2(\alpha^2f^2 - \beta^2g^2)^2}. \quad (2.16)$$

За втория фундаментален тензор  $\sigma$  получаваме:

$$\begin{aligned}\sigma(z_u, z_u) &= \frac{(f''g' - f'g'')}{\sqrt{f'^2 + g'^2}}n_1; \\ \sigma(z_u, z_v) &= \frac{\alpha\beta(f'g - fg')}{\sqrt{\beta^2g^2 - \alpha^2f^2}}n_2; \\ \sigma(z_v, z_v) &= \frac{-(\alpha^2fg' + \beta^2gf')}{\sqrt{f'^2 + g'^2}}n_1,\end{aligned}$$

откъдето намираме:

$$\begin{aligned}\sigma(x, x) &= \frac{(f''g' - f'g'')}{(f'^2 + g'^2)\sqrt{f'^2 + g'^2}}n_1; \\ \sigma(x, y) &= \frac{\alpha\beta(f'g - fg')}{(\beta^2g^2 - \alpha^2f^2)\sqrt{(f'^2 + g'^2)}}n_2; \\ \sigma(y, y) &= \frac{-(\alpha^2fg' + \beta^2gf')}{(\beta^2g^2 - \alpha^2f^2)\sqrt{f'^2 + g'^2}}n_1.\end{aligned} \quad (2.17)$$

Като използваме (2.17), получаваме Гаусовата кривина  $K$  на  $\mathcal{M}_2$ :

$$K = \frac{\alpha^2 \beta^2 (f'g - fg')^2 (f'^2 + g'^2) - (f''g' - f'g'')(\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2)(\alpha^2 fg' + \beta^2 f'g)}{(f'^2 + g'^2)^2 (\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2)^2}. \quad (2.18)$$

Векторното поле на средната кривина  $H$  на  $\mathcal{M}_2$  има вида:

$$H = \frac{(f'g'' - f''g')(\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2) + (\alpha^2 fg' + \beta^2 f'g)(f'^2 + g'^2)}{2(\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2)(\sqrt{f'^2 + g'^2})^3} n_1. \quad (2.19)$$

Аналогично, за повърхнината  $\mathcal{M}_2$  проверяваме дали изображението на Вайнгартен е диагонализируемо. За целта пресмятаме:

$$\kappa^2 - k = \frac{\alpha^2 \beta^2 (fg' - f'g)^2 \left[ (f'^2 + g'^2)(\alpha^2 fg' + \beta^2 f'g) - (f''g' - f'g'')(\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2) \right]^2}{(f'^2 + g'^2)^4 (\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2)^4}.$$

Очевидно, изразът по-горе винаги е по-голям от нула и следователно, повърхнината  $\mathcal{M}_2$  допуска параметризация спрямо главните линии. Тогава, можем да въведем геометричен репер  $\{X, Y, N_1, N_2\}$  и да запишем деривационни формули от типа на Френе. Деривационните формули от типа на Френе за повърхнината  $\mathcal{M}_2$  се задават чрез (1.21), където  $N_1 = n_1$  и  $N_2 = n_2$ .

За функциите  $\gamma_1, \gamma_2$ , определени от геометричния репер, пресмятаме:

$$\gamma_1 = -y(\ln \sqrt{E}) = -\frac{z_v}{\sqrt{-G}}(\ln \sqrt{E}) = 0,$$

$$\gamma_2 = x(\ln \sqrt{-G}) = \frac{G_u}{2G\sqrt{E}} = \frac{(\alpha^2 ff' - \beta^2 gg')}{(\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2)\sqrt{f'^2 + g'^2}}.$$

За пресмятането на останалите функции  $\nu_1, \nu_2, \lambda, \mu, \beta_1, \beta_2$  намираме последователно:

$$\tilde{\nabla}_x x = \frac{1}{E} z_{uu} + \frac{-E_u}{2E^2} z_u,$$

откъдето за  $\nu_1$  получаваме:

$$\nu_1 = \langle \tilde{\nabla}_x x, b \rangle = \frac{f''g' - f'g''}{(\sqrt{f'^2 + g'^2})^3}.$$

От

$$\tilde{\nabla}_y y = \frac{1}{-G} z_{vv} + \frac{G_v}{2G^2} z_v,$$

получаваме, че  $\nu_2$  се изразява по следния начин:

$$\nu_2 = \langle \tilde{\nabla}_y y, N_1 \rangle = \frac{(\alpha^2 fg' + \beta^2 gf')}{(\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2)(\sqrt{f'^2 + g'^2})}.$$

От

$$\tilde{\nabla}_x y = \frac{1}{\sqrt{-EG}} z_{uv} + \frac{1}{\sqrt{E}} \left( \frac{1}{\sqrt{-G}} \right)_u z_v$$

намираме функциите  $\lambda$  и  $\mu$ :

$$\lambda = \langle \tilde{\nabla}_x y, N_1 \rangle = 0, \quad \mu = \langle \tilde{\nabla}_x y, N_1 \rangle = \frac{-\alpha\beta(f'g - fg')}{(\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2)\sqrt{f'^2 + g'^2}}.$$

След диференциране на векторното поле  $N_1$  по  $x$  и  $y$ , получаваме

$$\beta_1 = 0, \quad \beta_2 = \frac{-\alpha\beta(gg' + ff')}{(\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2)\sqrt{f'^2 + g'^2}}.$$

Окончателно, функциите  $\gamma_1, \gamma_2, \nu_1, \nu_2, \lambda, \mu, \beta_1, \beta_2$ , определени от геометричния репер  $\{X, Y, N_1, N_2\}$  на повърхнината  $\mathcal{M}_2$ , се изразяват чрез функциите  $f$  и  $g$  по следните формули:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 0; & \gamma_2 &= \frac{(\alpha^2 f f' - \beta^2 g g')}{(\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2)\sqrt{f'^2 + g'^2}}; \\ \nu_1 &= \frac{f''g' - f'g''}{(\sqrt{f'^2 + g'^2})^3}; & \nu_2 &= \frac{(\alpha^2 f g' + \beta^2 g f')}{(\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2)(\sqrt{f'^2 + g'^2})}; \\ \lambda &= 0; & \mu &= \frac{-\alpha\beta(f'g - fg')}{(\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2)\sqrt{f'^2 + g'^2}}; \\ \beta_1 &= 0; & \beta_2 &= \frac{-\alpha\beta(gg' + ff')}{(\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2)\sqrt{f'^2 + g'^2}}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Ще отбележим, че инвариантата  $\lambda$  за времениподобните обобщени ротационни повърхнини от първи и втори тип е нула, с което се характеризират Chen-повърхнините и следователно, е в сила следната теорема.

**Теорема 2.1.1.** *Времениподобните обобщени ротационни повърхнини от първи и втори тип без минимални точки в  $\mathbb{R}_1^4$  са нетривиални Chen-повърхнини.*

В следващите параграфи ще опишем някои класове времениподобни обобщени ротационни повърхнини: плоски; с плоска нормална свързаност; повърхнини, състоящи се от параболични точки; минимални; с постоянно векторно поле на средната кривина; с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина.

### 2.1.3 Плоски времениподобни обобщени ротационни повърхнини

Нека  $\mathcal{M}_1$  и  $\mathcal{M}_2$  са времениподобни обобщени ротационни повърхнини от първи и втори тип, дефинирани съответно чрез (2.3) и (2.13). Една повърхнина се нарича плоска,

ако Гаусовата ѝ кривина  $K$  е нула. В следващото твърдение ще опишем аналитично всички плоски времениподобни обобщени ротационни повърхнини от първи и втори тип.

**Теорема 2.1.2.** (i) *Времениподобна обобщена ротационна повърхнина от първи тип е плоска тогава и само тогава, когато, с точност до параметризация, меридианната ѝ крива е определена чрез  $s : x(u) = (f(u), 0, 0, u)$ , където  $f(u)$  е решение на следното диференциално уравнение:*

$$\left( \ln \left| \frac{1+f'}{1-f'} \right| \right)' = \frac{-2\alpha^2\beta^2 (f - uf')^2}{(\alpha^2 f + \beta^2 uf') (\alpha^2 f^2 + \beta^2 u^2)}. \quad (2.21)$$

(ii) *Времениподобна обобщена ротационна повърхнина от втори тип е плоска тогава и само тогава, когато, с точност до параметризация, меридианната ѝ крива е определена чрез  $s : x(u) = (f(u), 0, u, 0)$ , където  $f(u)$  е решение на следното диференциално уравнение:*

$$(\arctan f')' = \frac{\alpha^2\beta^2 (uf' - f)^2}{(\alpha^2 f^2 - \beta^2 u^2) (\alpha^2 f + \beta^2 uf')}. \quad (2.22)$$

*Доказателство.* (i) Нека  $\mathcal{M}_1$  е времениподобна обобщена ротационна повърхнина от първи тип, дефинирана чрез (2.3). Като използваме формулата (2.10) за Гаусовата кривина на  $\mathcal{M}_1$ , получаваме, че  $K = 0$  тогава и само тогава, когато функциите  $f(u)$  и  $g(u)$  удовлетворяват равенството

$$\alpha^2\beta^2 (fg' - f'g)^2 (f'^2 - g'^2) = (f''g' - f'g'') (\alpha^2 fg' + \beta^2 f'g) (\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2). \quad (2.23)$$

Без ограничение на общността можем да считаме, че меридианната крива е параметризирана чрез  $f = f(u)$ ;  $g = u$ . Тогава, равенството (2.23) приема вида

$$\frac{f''}{(1 - f'^2)} = \frac{-\alpha^2\beta^2 (f - uf')^2}{(\alpha^2 f + \beta^2 uf') (\alpha^2 f^2 + \beta^2 u^2)},$$

който е еквивалентен на (2.21).

(ii) Аналогично, ако  $\mathcal{M}_2$  е времениподобна обобщена ротационна повърхнина от втори тип, дефинирана чрез (2.13), тогава от равенството (2.18) следва, че  $K = 0$  тогава и само тогава, когато  $f(u)$  и  $g(u)$  удовлетворяват равенството

$$\alpha^2\beta^2 (f'g - fg')^2 (f'^2 + g'^2) = (f''g' - f'g'') (\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2) (\alpha^2 fg' + \beta^2 f'g). \quad (2.24)$$

Отново считаме, че меридианната крива е параметризирана чрез  $f = f(u)$ ;  $g = u$ .

Тогава равенството (2.24) приема вида

$$\frac{f''}{1 + f'^2} = \frac{\alpha^2 \beta^2 (uf' - f)^2}{(\alpha^2 f^2 - \beta^2 u^2)(\alpha^2 f + \beta^2 uf')},$$

който е еквивалентен на (2.22).

□

#### 2.1.4 Времениподобни обобщени ротационни повърхнини с плоска нормална свързаност

Една повърхнина се нарича *повърхнина с плоска нормална свързаност*, ако нейната кривина на нормалната свързаност е нула, т.е.  $\varkappa = 0$ . В следващата теорема описваме аналитично всички времениподобни обобщени ротационни повърхнини от първи и втори тип с плоска нормална свързаност.

**Теорема 2.1.3.** (i) *Времениподобна обобщена ротационна повърхнина от първи тип има плоска нормална свързаност тогава и само тогава, когато, с точност до параметризация, меридианната ѝ крива е определена чрез  $s : x(u) = (f(u), 0, 0, u)$ , където  $f(u)$  е решение на следното диференциално уравнение:*

$$\left( \ln \left| \frac{1 + f'}{1 - f'} \right| \right)' = \frac{2(\alpha^2 f + \beta^2 uf')}{\alpha^2 f^2 + \beta^2 u^2}. \quad (2.25)$$

(ii) *Времениподобна обобщена ротационна повърхнина от втори тип има плоска нормална свързаност тогава и само тогава, когато, с точност до параметризация, меридианната ѝ крива е определена чрез  $s : x(u) = (f(u), 0, u, 0)$ , където  $f(u)$  е решение на следното диференциално уравнение:*

$$(\arctan f')' = \frac{\alpha^2 f + \beta^2 uf'}{\beta^2 u^2 - \alpha^2 f^2}. \quad (2.26)$$

*Доказателство.* (i) Нека  $\mathcal{M}_1$  е времениподобна обобщена ротационна повърхнина от първи тип, дефинирана чрез (2.3). Като използваме формула (2.8), получаваме, че кривината на нормалната свързаност е нула тогава и само тогава, когато функциите  $f(u)$  и  $g(u)$  удовлетворяват равенството

$$\frac{f''g' - g'f''}{g'^2 - f'^2} = \frac{\alpha^2 fg' + \beta^2 f'g}{\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2}. \quad (2.27)$$

Без ограничение на общността можем да считаме, че меридианната крива е парамет-



ризирана чрез  $f = f(u)$ ;  $g = u$ . Тогава равенството (2.27) приема вида

$$\frac{f''}{1 - f'^2} = \frac{\alpha^2 f + \beta^2 u f'}{\alpha^2 f^2 + \beta^2 u^2},$$

който е еквивалентен на (2.25).

(ii) Аналогично, ако  $\mathcal{M}_2$  е времениподобна обобщена ротационна повърхнина от втори тип, дефинирана чрез (2.13), тогава от равенството (2.16) следва, че  $\varkappa = 0$  тогава и само тогава, когато функциите  $f(u)$  и  $g(u)$  удовлетворяват

$$\frac{f''g' - f'g''}{f'^2 + g'^2} = \frac{\alpha^2 f g' + \beta^2 f' g}{\beta^2 g^2 - \alpha^2 f^2}. \quad (2.28)$$

Отново считаме, че меридианната крива е параметризирана чрез  $f = f(u)$ ;  $g = u$ . Тогава равенството (2.28) приема вида

$$\frac{f''}{1 + f'^2} = \frac{\alpha^2 f + \beta^2 u f'}{\beta^2 u^2 - \alpha^2 f^2},$$

който е еквивалентен на (2.26).

□

### 2.1.5 Времениподобни обобщени ротационни повърхнини, състоящи се от параболични точки

Да припомним, че една повърхнина, състояща се от параболични точки, се характеризира с условието  $k = 0$ . Следващата теорема класифицира времениподобните обобщени ротационни повърхнини от първи и втори тип с  $k = 0$ .

**Теорема 2.1.4.** *Времениподобна обобщена ротационна повърхнина от първи или втори тип се състои от параболични точки, тогава и само тогава, когато е изпълнено едно от следните условия:*

- (i) повърхнината е развиваема праволинейна повърхнина в  $\mathbb{R}_1^4$ ;
- (ii) повърхнината е неразвиваема праволинейна повърхнина в  $\mathbb{R}_1^4$ ;
- (iii) повърхнината е неправолинейна повърхнина в  $\mathbb{R}_1^4$ , чиято меридианна крива е зададена чрез  $g = C u^{-\frac{\beta^2}{\alpha^2}}$ , където  $C = \text{const} \neq 0$ .

*Доказателство.* От получените равенства (2.7) и (2.15) за функцията  $k$  на времениподобна обобщена ротационна повърхнина съответно от първи или втори тип, следва, че  $k = 0$  тогава и само тогава, когато функциите  $f(u)$  и  $g(u)$  удовлетворяват равенството

$$(fg' - f'g)(f''g' - f'g'')( \alpha^2 f g' + \beta^2 f' g ) = 0.$$

Без ограничение на общността считаме, че меридианната крива е параметризирана по следния начин:  $f = u$ ;  $g = g(u)$ . Тогава равенството по-горе приема вида:

$$g''(ug' - g)(\alpha^2 ug' + \beta^2 g) = 0.$$

Следователно, функцията  $k$  е нула, тогава и само тогава, когато е налице един от следните 3 случая:

(1) Изпълнено е условието  $ug' - g = 0$  за функцията  $g(u)$ , което е еквивалентно на следното диференциално уравнение:

$$\frac{g'}{g} = \frac{1}{u}.$$

След интегриране на двете страни по  $u$  получаваме, че всички решения са от вида  $g = au$ , където  $a = \text{const} \neq 0$ . В този случай меридианната крива е права, която минава през началото на координатната система, откъдето следва, че съответната времениподобна обобщена ротационна повърхнина (от първи или втори тип) е праволинейна повърхнина в  $\mathbb{R}_1^4$ . В този случай се получава, че  $k = \varkappa = K$  и като използваме деривационните формули от типа на Френе (1.21) за времениподобна обобщена ротационна повърхнина от първи тип и съответно от втори тип, получаваме, че

$$\tilde{\nabla}_x n_1 = 0; \quad \tilde{\nabla}_x n_2 = 0,$$

т.е. нормалното пространство е постоянно. Окончателно, в този случай времениподобната обобщена ротационна повърхнина (от първи или втори тип) е развиваема праволинейна повърхнина в  $\mathbb{R}_1^4$ .

(2) Функцията  $g(u)$  удовлетворява уравнението  $g'' = 0$ , чиито решения са от вида  $g = au + b$ , където  $a = \text{const} \neq 0, b = \text{const} \neq 0$ . В този случай меридианната крива е права, която не минава през началото на координатната система. След като пресметнем производните  $\tilde{\nabla}_x n_1$  и  $\tilde{\nabla}_x n_2$  за времениподобната обобщена ротационна повърхнина от първи (съотв. втори) тип, получаваме, че  $\tilde{\nabla}_x n_1 \neq 0; \tilde{\nabla}_x n_2 = 0$  (съотв.  $\tilde{\nabla}_x n_1 = 0; \tilde{\nabla}_x n_2 \neq 0$ ). Лесно може да се установи, че  $\varkappa \neq 0$ . Следователно, в този случай съответната времениподобна обобщена ротационна повърхнина (от първи или втори тип) е неразвиваема праволинейна повърхнина в  $\mathbb{R}_1^4$ .

(3) В този случай за функцията  $g(u)$  е в сила уравнението  $\alpha^2 ug' + \beta^2 g = 0$ , което

е еквивалентно на

$$\frac{g'}{g} = -\frac{\beta^2}{\alpha^2} \frac{1}{u}.$$

След интегриране получаваме, че решенията на последното диференциално уравнение имат вида  $g = Cu^{-\frac{\beta^2}{\alpha^2}}$ , където  $C = \text{const} \neq 0$ . В този случай меридианната крива не е права и производните  $\tilde{\nabla}_x n_1$  и  $\tilde{\nabla}_x n_2$  са различни от нула. Лесно се проверява, че инвариантите  $\varkappa$  и  $K$  са ненулеви. Следователно, съответната времениподобна обобщена ротационна повърхнина (от първи или втори тип) е неправолинейна повърхнина в  $\mathbb{R}_1^4$ .  $\square$

### 2.1.6 Минимални времениподобни обобщени ротационни повърхнини

В този параграф ще разгледаме минималните времениподобни обобщени ротационни повърхнини от първи и втори тип. Да припомним, че една повърхнина се нарича минимална тогава и само тогава, когато  $H = 0$ . Последното условие, изразено чрез функциите  $\nu_1$  и  $\nu_2$ , е  $\nu_1 = \nu_2$ . Като използваме получените равенства (2.11) и (2.12) за времениподобните обобщени ротационни повърхнини от първи тип, получаваме, че те са минимални тогава и само тогава, когато функциите  $f(u)$  и  $g(u)$  удовлетворяват следното равенство:

$$\frac{f''g' - f'g''}{g'^2 - f'^2} = \frac{-(\alpha^2 fg' + \beta^2 gf')}{\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2}.$$

Аналогично, като използваме (2.19) и (2.20), получаваме, че времениподобните обобщени ротационни повърхнини от втори тип са минимални тогава и само тогава, когато функциите  $f(u)$  и  $g(u)$  удовлетворяват следното равенство

$$\frac{f''g' - f'g''}{f'^2 + g'^2} = \frac{(\alpha^2 fg' + \beta^2 gf')}{\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2}.$$

В следващата теорема описваме експлицитно минималните времениподобни обобщени ротационни повърхнини от първи и втори тип.

**Теорема 2.1.5.** (i) *Времениподобна обобщена ротационна повърхнина от първи тип е минимална тогава и само тогава, когато, с точност до параметризация, меридианната ѝ крива е определена чрез  $s : x(u) = (f(u), 0, 0, u)$ , където функцията  $f(u)$  се задава с формулата*

$$f = \frac{\sqrt{A}}{\alpha} \sin \left( \varepsilon \frac{\alpha}{\beta} \ln \left| \beta u + \sqrt{A + \beta^2 u^2} \right| + C \right); \quad A = \text{const}, \quad C = \text{const}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

(ii) Времениподобна обобщена ротационна повърхнина от втори тип е минимална тогава и само тогава, когато, с точност до параметризация, меридианната ѝ крива е определена чрез  $s : x(u) = (f(u), 0, u, 0)$ , където функцията  $f(u)$  се задава с формулата

$$f = \frac{\sqrt{A}}{\alpha} \sin \left( \varepsilon \frac{\alpha}{\beta} \ln \left| \beta u + \sqrt{\beta^2 u^2 - A} \right| + C \right); \quad A = \text{const}, \quad C = \text{const}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

*Доказателство.* (i) Първо трябва да опростим уравненията за времениподобната обобщена ротационна повърхнина от първи тип. Като използваме, че линейната свързаност  $\tilde{\nabla}$  на  $\mathbb{R}_1^4$  е плоска, от  $\tilde{R}(x, y, x) = 0$  и  $\tilde{R}(x, y, y) = 0$ , след пресмятане

$$\begin{aligned} \tilde{R}(x, y, x) &= \tilde{\nabla}_x \tilde{\nabla}_y x - \tilde{\nabla}_y \tilde{\nabla}_x x - \tilde{\nabla}_{[x, y]} x = \\ &= \tilde{\nabla}_x (-\gamma_2 y + \lambda n_2 + \mu n_1) - \tilde{\nabla}_y (\gamma_1 y + \nu_1 n_2) - \tilde{\nabla}_{\gamma_1 x + \gamma_2 y} x \\ &= \left( \nu_1 \nu_2 - \lambda^2 - \mu^2 - \gamma_1^2 + \gamma_2^2 - x(\gamma_2) - y(\gamma_1) \right) y + \left( x(\mu) - 2\mu\gamma_2 + \lambda\beta_1 + \nu_1\beta_2 \right) n_1 \\ &\quad + \left( x(\lambda) - y(\nu_1) - 2\lambda\gamma_2 - \gamma_1(\nu_1 + \nu_2) - \mu\beta_1 \right) n_2, \\ \tilde{R}(x, y, y) &= \tilde{\nabla}_x \tilde{\nabla}_y y - \tilde{\nabla}_y \tilde{\nabla}_x y - \tilde{\nabla}_{[x, y]} y = \\ &= \tilde{\nabla}_x (-\gamma_2 x + \nu_2 n_2) - \tilde{\nabla}_y (\gamma_1 x + \lambda n_2 + \mu n_1) - \tilde{\nabla}_{\gamma_1 x + \gamma_2 y} y \\ &= \left( \nu_1 \nu_2 - \lambda^2 - \mu^2 - \gamma_1^2 + \gamma_2^2 - x(\gamma_2) - y(\gamma_1) \right) x + \left( -y(\mu) - 2\mu\gamma_1 + \lambda\beta_2 + \nu_2\beta_1 \right) n_1 \\ &\quad + \left( x(\nu_2) - y(\lambda) - 2\lambda\gamma_1 - \gamma_2(\nu_1 + \nu_2) - \mu\beta_2 \right) n_2, \end{aligned}$$

получаваме, че за времениподобната обобщена ротационна повърхнина от първи тип са в сила следните равенства:

$$\begin{aligned} x(\mu) &= 2\mu\gamma_2 - \lambda\beta_1 - \nu_1\beta_2, \\ x(\nu_2) - y(\lambda) &= 2\lambda\gamma_1 + \gamma_2(\nu_1 + \nu_2) + \mu\beta_2. \end{aligned}$$

В случая на времениподобна обобщена ротационна повърхнина от първи тип имаме  $\lambda = 0$ ,  $\beta_1 = 0$  и  $\nu_1 = \nu_2$ . Следователно, от равенствата по-горе получаваме

$$\begin{aligned} x(\mu) &= 2\mu\gamma_2 - \nu_1\beta_2, \\ x(\nu_1) &= 2\gamma_2\nu_1 + \mu\beta_2, \end{aligned}$$

откъдето следва, че  $\gamma_2 = \frac{1}{4}x(\ln(\mu^2 + \nu_1^2))$ . От друга страна,  $\gamma_2 = -x(\ln \sqrt{G})$ . Следо-

вателно, получаваме  $\frac{1}{4}x(\ln(\mu^2 + \nu_1^2)) + x(\ln \sqrt{G}) = 0$ , откъдето намираме

$$x(G^2(\mu^2 + \nu_1^2)) = 0. \quad (2.29)$$

Като използваме, че  $\mu$ ,  $\nu_1$  и  $G$  са функции само на параметъра  $u$ , от (2.29) получаваме

$$G^2(\mu^2 + \nu_1^2) = B^2,$$

където  $B$  е константа. За времениподобна обобщена ротационна повърхнина от първи тип имаме  $G = \alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2$ . Като използваме израза за  $\mu$  от равенствата (2.12) и това, че  $\nu_1 = \nu_2$ , получаваме:

$$(\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2)^2 \left( \frac{\alpha^2 \beta^2 (fg' - gf')^2}{(\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2)^2 (g'^2 - f'^2)} + \frac{(\alpha^2 fg' + \beta^2 gf')^2}{(\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2)^2 (g'^2 - f'^2)} \right) = B^2,$$

което е еквивалентно на

$$\frac{\alpha^2 \beta^2 (fg' - gf')^2 + (\alpha^2 fg' + \beta^2 gf')^2}{(g'^2 - f'^2)} = B^2.$$

Последното равенство може да се запише във вида:

$$\frac{\alpha^2 f^2 g'^2 + \beta^2 g^2 f'^2}{(g'^2 - f'^2)} = \frac{B^2}{\alpha^2 + \beta^2}. \quad (2.30)$$

Без ограничение на общността считаме, че  $g'^2 - f'^2 = 1$ . Тогава от (2.30) получаваме

$$\alpha^2 f^2 g'^2 + \beta^2 g^2 f'^2 = \frac{B^2}{\alpha^2 + \beta^2}. \quad (2.31)$$

Означаваме  $A = \frac{B^2}{\alpha^2 + \beta^2}$ . Като използваме, че  $g'^2 = 1 + f'^2$ , от (2.31) намираме:

$$f'^2 = \frac{A - \alpha^2 f^2}{\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2}, \quad g'^2 = \frac{A + \beta^2 g^2}{\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2}. \quad (2.32)$$

Да отбележим, че константата  $A$  удовлетворява условието  $A > \alpha^2 f^2$ , тъй като  $f'^2 > 0$ . От равенство (2.32) получаваме

$$(A + \beta^2 g^2) f'^2 = (A - \alpha^2 f^2) g'^2,$$

откъдето намираме

$$\frac{f'}{\sqrt{A - \alpha^2 f^2}} = \varepsilon \frac{g'}{\sqrt{A + \beta^2 g^2}}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Интегрираме последното равенство и получаваме:

$$\int \frac{df}{\sqrt{A - \alpha^2 f^2}} = \varepsilon \int \frac{dg}{\sqrt{A + \beta^2 g^2}}.$$

След пресмятане на интегралите, намираме

$$\arcsin \frac{\alpha f}{\sqrt{A}} = \varepsilon \frac{\alpha}{\beta} \ln \left| \beta g + \sqrt{A + \beta^2 g^2} \right| + C, \quad C = \text{const.}$$

Следователно, в случая на минимална времениподобна обобщена ротационна повърхнина от първи тип, меридианната крива се задава с формулата:

$$f = \frac{\sqrt{A}}{\alpha} \sin \left( \varepsilon \frac{\alpha}{\beta} \ln \left| \beta g + \sqrt{A + \beta^2 g^2} \right| + C \right).$$

Ако означим  $g = u$ , то от горното равенство получаваме, че функцията  $f = f(u)$  има вида

$$f = \frac{\sqrt{A}}{\alpha} \sin \left( \varepsilon \frac{\alpha}{\beta} \ln \left| \beta u + \sqrt{A + \beta^2 u^2} \right| + C \right).$$

(ii) Аналогично, за времениподобна обобщена ротационна повърхнина от втори тип като използваме, че линейната свързаност  $\tilde{\nabla}$  на  $\mathbb{R}_1^4$  е плоска, от  $\tilde{R}(x, y, x) = 0$  и  $\tilde{R}(x, y, y) = 0$ , след пресмятане получаваме следните равенства:

$$\begin{aligned} x(\mu) &= \nu_1 \beta_2 - 2\mu \gamma_2 - \beta_1 \lambda, \\ x(\nu_2) - y(\lambda) &= -2\lambda \gamma_1 - \gamma_2(\nu_1 + \nu_2) - \mu \beta_2. \end{aligned}$$

В случая на времениподобна обобщена ротационна повърхнина от втори тип имаме  $\gamma_1 = 0$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\beta_1 = 0$  и  $\nu_1 = \nu_2$ . Следователно, от равенствата по-горе следва, че

$$\begin{aligned} x(\mu) &= \nu_1 \beta_2 - 2\mu \gamma_2, \\ x(\nu_1) &= -2\gamma_2 \nu_1 - \mu \beta_2, \end{aligned}$$

откъдето имаме  $\gamma_2 = -\frac{1}{4}x(\ln(\mu^2 + \nu_1^2))$ . От друга страна,  $\gamma_2 = x(\ln \sqrt{-G})$ . Следователно, получаваме  $\frac{1}{4}x(\ln(\mu^2 + \nu_1^2)) + x(\ln \sqrt{-G}) = 0$ , което показва, че

$$x(G^2(\mu^2 + \nu_1^2)) = 0.$$

Като използваме, че  $\mu$ ,  $\nu_1$  и  $G$  са функции, зависещи само от параметъра  $u$ , получаваме

$$G^2(\mu^2 + \nu_1^2) = B^2,$$

където  $B$  е константа. За времениподобна обобщена ротационна повърхнина от втори

тип имаме  $G = \alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2$ . Като използваме израза за  $\mu$  от равенствата (2.20) и това, че  $\nu_1 = \nu_2$ , получаваме:

$$(\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2)^2 \left( \frac{\alpha^2 \beta^2 (f'g - fg')^2}{(\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2)^2 (f'^2 + g'^2)} + \frac{(\alpha^2 fg' + \beta^2 gf')^2}{(\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2)^2 (f'^2 + g'^2)} \right) = B^2,$$

което е еквивалентно на

$$\frac{\alpha^2 \beta^2 (f'g - fg')^2 + (\alpha^2 fg' + \beta^2 gf')^2}{(f'^2 + g'^2)} = B^2.$$

Последното равенство записваме във вида:

$$\frac{\alpha^2 f^2 g'^2 + \beta^2 g^2 f'^2}{(f'^2 + g'^2)} = \frac{B^2}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Без ограничение на общостта, можем да приемем, че  $f'^2 + g'^2 = 1$  и от горното равенство намираме

$$\alpha^2 f^2 g'^2 + \beta^2 g^2 f'^2 = \frac{B^2}{\alpha^2 + \beta^2}. \quad (2.33)$$

Отново означаваме  $A = \frac{B^2}{\alpha^2 + \beta^2}$ . Като използваме, че  $g'^2 = 1 - f'^2$ , от (2.33), получаваме

$$f'^2 = \frac{A - \alpha^2 f^2}{\beta^2 g^2 - \alpha^2 f^2}, \quad g'^2 = \frac{\beta^2 g^2 - A}{\beta^2 g^2 - \alpha^2 f^2}. \quad (2.34)$$

Тъй като  $f'^2 > 0$ ,  $g'^2 > 0$ , то константата  $A$  удовлетворява условието  $\alpha^2 f^2 < A < \beta^2 g^2$ . От (2.34) следва, че

$$(\beta^2 g^2 - A)f'^2 = (A - \alpha^2 f^2)g'^2,$$

откъдето намираме

$$\frac{f'}{\sqrt{A - \alpha^2 f^2}} = \varepsilon \frac{g'}{\sqrt{\beta^2 g^2 - A}}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Интегрираме последното равенство и получаваме:

$$\int \frac{df}{\sqrt{A - \alpha^2 f^2}} = \varepsilon \int \frac{dg}{\sqrt{\beta^2 g^2 - A}}.$$

Като пресметнем интегралите, намираме

$$\arcsin \frac{\alpha f}{\sqrt{A}} = \varepsilon \frac{\alpha}{\beta} \ln \left| \beta g + \sqrt{\beta^2 g^2 - A} \right| + C, \quad C = \text{const.}$$

Следователно, в случая на минимална времениподобна обобщена ротационна повърх-

нина от втори тип меридианната крива се дава със следната формула:

$$f = \frac{\sqrt{A}}{\alpha} \sin \left( \varepsilon \frac{\alpha}{\beta} \ln \left| \beta g + \sqrt{\beta^2 g^2 - A} \right| + C \right).$$

Означаваме  $g = u$ . Тогава от горното равенство получаваме следния вид на функцията  $f = f(u)$ :

$$f = \frac{\sqrt{A}}{\alpha} \sin \left( \varepsilon \frac{\alpha}{\beta} \ln \left| \beta u + \sqrt{\beta^2 u^2 - A} \right| + C \right).$$

□

### 2.1.7 Времениподобни обобщени ротационни повърхнини с постоянно векторно поле на средната кривина

В този параграф ще разгледаме времениподобните обобщени ротационни повърхнини от първи и втори тип с ненулево постоянно векторно поле  $H$  на средната кривина, т.е.  $\langle H, H \rangle = \text{const} \neq 0$ . В следващата теорема описваме аналитично този клас повърхнини.

**Теорема 2.1.6.** (i) *Времениподобна обобщена ротационна повърхнина от първи тип е с постоянно векторно поле на средната кривина тогава и само тогава, когато, с точност до параметризация, меридианната ѝ крива е определена чрез  $s : x(u) = (f(u), 0, 0, u)$ , където  $f(u)$  е решение на следното диференциално уравнение:*

$$\left( \ln \left| \frac{1 + f'}{1 - f'} \right| \right)' = \frac{-2(\alpha^2 f + \beta^2 u f')}{(\alpha^2 f^2 + \beta^2 u^2)} + 2C \sqrt{1 - f'^2}, \quad C = \text{const} \neq 0. \quad (2.35)$$

(ii) *Времениподобна обобщена ротационна повърхнина от втори тип е с постоянно векторно поле на средната кривина тогава и само тогава, когато, с точност до параметризация, меридианната ѝ крива е определена чрез  $s : x(u) = (f(u), 0, u, 0)$ , където  $f(u)$  е решение на следното диференциално уравнение:*

$$(\arctan f')' = \frac{(\alpha^2 f + \beta^2 u f')}{(\alpha^2 f^2 - \beta^2 u^2)} + C \sqrt{1 + f'^2}, \quad C = \text{const} \neq 0. \quad (2.36)$$

*Доказателство.* Като използваме, че векторното поле на средната кривина за времениподобните обобщени ротационни повърхнини от първи тип се изразява чрез формулата (2.11), получаваме, че този клас повърхнини имат постоянно векторно поле на средната кривина тогава и само тогава, когато е изпълнено:

$$\frac{f'' g' - f' g''}{(\sqrt{g'^2 - f'^2})^3} = \frac{-(\alpha^2 f g' + \beta^2 g f')}{(\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2)(\sqrt{g'^2 - f'^2})} + C, \quad (2.37)$$



където  $C = \text{const.}$  Без ограничение на общността можем да считаме, че меридианната крива е параметризирана чрез  $f = f(u); g = u$ . Тогава равенството (2.37) приема вида

$$\frac{f''}{(\sqrt{1-f'^2})^3} = \frac{-(\alpha^2 f + \beta^2 u f')}{(\alpha^2 f^2 + \beta^2 u^2)(\sqrt{1-f'^2})} + C,$$

което е еквивалентно на

$$\frac{f''}{1-f'^2} = \frac{-(\alpha^2 f + \beta^2 u f')}{(\alpha^2 f^2 + \beta^2 u^2)} + C\sqrt{1-f'^2}.$$

От последното равенство получаваме диференциалното уравнение (2.35) за функцията  $f(u)$ .

Аналогично, от формулата (2.19) получаваме, че времениподобните обобщени ротационни повърхнини от втори тип имат постоянно векторно поле на средната кривина тогава и само тогава, когато е изпълнено:

$$\frac{f''g' - f'g''}{(\sqrt{f'^2 + g'^2})^3} = \frac{(\alpha^2 f g' + \beta^2 g f')}{(\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2)(\sqrt{f'^2 + g'^2})} + C. \quad (2.38)$$

Отново приемаме, че меридианната крива е параметризирана чрез  $f = f(u); g = u$ . Тогава равенството (2.38) приема вида

$$\frac{f''}{1+f'^2} = \frac{(\alpha^2 f + \beta^2 u f')}{(\alpha^2 f^2 - \beta^2 u^2)} + C\sqrt{1+f'^2},$$

откъдето получаваме диференциалното уравнение (2.36) за функцията  $f(u)$ .

□

### 2.1.8 Времениподобни обобщени ротационни повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина

В този параграф ще опишем всички времениподобни обобщени ротационни повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина.

Нека  $\mathcal{M}_1$  е времениподобна обобщена ротационна повърхнина от първи тип, дефинирана чрез (2.3). В случая, когато  $H \neq 0$ , нормираното векторно поле на средната кривина за  $\mathcal{M}_1$  е векторното поле  $n_2$ , дефинирано чрез (2.4). Следователно,  $\mathcal{M}_1$  има паралелно нормирано векторно поле на средната кривина тогава и само тогава, когато  $D_x n_2 = D_y n_2 = 0$ .

Аналогично, ако  $\mathcal{M}_2$  е времениподобна обобщена ротационна повърхнина от втори

тип, дефинирана чрез (2.13), тогава,  $\mathcal{M}_2$  има паралелно нормирано векторно поле на средната кривина тогава и само тогава, когато  $D_x n_1 = D_y n_1 = 0$ , където  $n_1$  е векторното поле, дефинирано чрез (2.14).

Следващата теорема описва всички времеподобни обобщени ротационни повърхнини от първи и втори тип с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина.

**Теорема 2.1.7.** (i) *Времениподобна обобщена ротационна повърхнина от първи тип има паралелно нормирано векторно поле на средната кривина тогава и само тогава, когато, с точност до параметризация, меридианната ѝ крива е дефинирана чрез  $c : x(u) = (f(u), 0, 0, u)$ , където*

$$f(u) = \pm\sqrt{u^2 + C^2}; \quad C = \text{const} \neq 0.$$

(ii) *Времениподобна обобщена ротационна повърхнина от втори тип има паралелно нормирано векторно поле на средната кривина тогава и само тогава, когато, с точност до параметризация, меридианната ѝ крива е дефинирана чрез  $c : x(u) = (f(u), 0, 0, u)$ , където*

$$f(u) = \pm\sqrt{C^2 - u^2}; \quad u \in (-C, C); \quad C = \text{const} \neq 0.$$

*Доказателство.* (i) Нека  $\mathcal{M}_1$  е времеподобна обобщена ротационна повърхнина от първи тип, дефинирана чрез (2.3). За нормалната свързаност  $D$  на  $\mathcal{M}_1$  пресмятаме:

$$\begin{aligned} D_x n_1 &= 0; & D_x n_2 &= 0; \\ D_y n_1 &= \frac{\alpha\beta(gg' - ff')}{\sqrt{g'^2 - f'^2}(\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2)} n_2; & D_y n_2 &= -\frac{\alpha\beta(gg' - ff')}{\sqrt{g'^2 - f'^2}(\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2)} n_1. \end{aligned} \quad (2.39)$$

От формулите (2.39) следва, че  $D_x n_2 = D_y n_2 = 0$  тогава и само тогава, когато функциите  $f(u)$  и  $g(u)$  удовлетворяват следното диференциално уравнение:

$$ff' - gg' = 0.$$

Равенството по-горе показва, че функциите  $f$  и  $g$  са свързани чрез  $f^2 = g^2 + C_1$  за произволна константа  $C_1$ . Без ограничение на общността можем да считаме, че  $g(u) = u$ . Тогава  $f(u) = \pm\sqrt{u^2 + C_1}$ . Понеже  $f'^2 - g'^2 < 0$ , получаваме, че  $C_1 > 0$ . Следователно, функцията  $f$  има вида  $f(u) = \pm\sqrt{u^2 + C^2}$  за произволна константа  $C \neq 0$ .

(ii) Аналогично, за времеподобна обобщена ротационна повърхнина от втори

тип, дефинирана чрез (2.13), получаваме формулите:

$$\begin{aligned} D_x n_1 &= 0; & D_x n_2 &= 0; \\ D_y n_1 &= \frac{\alpha\beta(ff' + gg')}{\sqrt{f'^2 + g'^2}(\beta^2 g^2 - \alpha^2 f^2)} n_2; & D_y n_2 &= -\frac{\alpha\beta(ff' + gg')}{\sqrt{f'^2 + g'^2}(\beta^2 g^2 - \alpha^2 f^2)} n_1, \end{aligned}$$

откъдето намираме, че  $D_x n_2 = D_y n_2 = 0$  тогава и само тогава, когато функциите  $f(u)$  и  $g(u)$  удовлетворяват следното диференциално уравнение:

$$ff' + gg' = 0.$$

От последното равенство следва, че  $f^2 + g^2 = C_1$  за произволна константа  $C_1$ . Без ограничение на общността можем да считаме, че  $g(u) = u$ . Тогава  $f(u) = \pm\sqrt{-u^2 + C_1}$ . Понеже  $f'^2 + g'^2 > 0$ , получаваме  $C_1 > 0$ . Следователно, функцията  $f$  има вида  $f(u) = \pm\sqrt{C^2 - u^2}$  за произволна константа  $C \neq 0$ .

□

## 2.2 Времениподобни меридианни повърхнини в $\mathbb{R}_1^4$

В този параграф ще конструираме специален клас времениподобни повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$ , които не допускат параметризация спрямо главни линии. Тези повърхнини представляват 1-параметрични системи от меридиани на ротационна хиперповърхнина с времениподобна ос в 4-мерното пространство на Минковски  $\mathbb{R}_1^4$ .

Идеята за конструиране на 2-мерни повърхнини, лежащи върху ротационна хиперповърхнина, възниква първо в Евклидовото пространство  $\mathbb{R}^4$ . В [33] Г. Ганчев и В. Милушева конструират 2-мерни повърхнини, които са 1-параметрични системи от меридиани на ротационна хиперповърхнина в  $\mathbb{R}^4$ , поради което тези повърхнини са наречени *меридианни повърхнини*. Меридианните повърхнини с постоянна Гаусова кривина, с постоянен вектор на средната кривина, меридианните Chen-повърхнини и меридианните повърхнини с паралелно нормално пространство са описани в [33] и [38].

Идеята от Евклидовото пространство е използвана за конструиране на специален клас 2-мерни пространственоподобни повърхнини в 4-мерното пространство на Минковски  $\mathbb{R}_1^4$ , които лежат върху ротационна хиперповърхнина с времениподобна (съотв. пространственоподобна) ос. Тези повърхнини са наречени *меридианни повърхнини от елиптичен* (съотв. *хиперболичен*) *тип* [36]. В [36] е дадена класификация на меридианните повърхнини със светлинноподобно векторно поле на средната кривина (т. нар. marginally trapped меридианни повърхнини) в  $\mathbb{R}_1^4$ , а в [39] са описани меридианните повърхнини от елиптичен и хиперболичен тип от следните кла-

сове: с постоянна Гаусова кривина, с постоянен вектор на средната кривина, Чеп-повърхнините и повърхнините с паралелно нормално пространство.

Използвайки идеята за меридианните повърхнини в Евклидовото пространство и пространственоподобните меридианни повърхнини в пространството на Минковски, ще конструираме времениподобни меридианни повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$ , които са 1-параметрични системи от меридиани на ротационна хиперповърхнина с времениподобна ос.

### 2.2.1 Меридианни повърхнини, лежащи върху ротационна хиперповърхнина с времениподобна ос

Нека  $f = f(u)$  и  $g = g(u)$  са гладки функции, дефинирани в интервал  $I \subset \mathbb{R}$ , такива, че  $\dot{f}^2(u) - \dot{g}^2(u) < 0$ ,  $u \in I$ . Ротационната хиперповърхнина в  $\mathbb{R}_1^4$ , получена при ротация на кривата  $m : u \rightarrow (f(u), g(u))$  около времениподобната ос  $Oe_4$ , има следната параметризация:

$$\mathcal{M}' : Z(u, w^1, w^2) = f(u) \cos w^1 \cos w^2 e_1 + f(u) \cos w^1 \sin w^2 e_2 + f(u) \sin w^1 e_3 + g(u) e_4.$$

Хиперповърхнината  $\mathcal{M}'$  е 2-параметрична система от меридиани.

Ако означим  $l(w^1, w^2) = \cos w^1 \cos w^2 e_1 + \cos w^1 \sin w^2 e_2 + \sin w^1 e_3$ , то параметризацията на  $\mathcal{M}'$  може да се запише така:

$$\mathcal{M}' : Z(u, w^1, w^2) = f(u) l(w^1, w^2) + g(u) e_4, \quad u \in I, w \in J.$$

Да отбележим, че  $l = l(w^1, w^2)$  е радиус-векторът на 2-мерната сфера  $S^2(1)$  с център  $O$ , лежаща в 3-мерното Евклидово пространство  $\mathbb{R}^3 = \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$ .

Нека  $w^1 = w^1(v)$ ,  $w^2 = w^2(v)$ ,  $v \in J$ ,  $J \subset \mathbb{R}$ . Тогава,

$$c : l = l(v) = l(w^1(v), w^2(v))$$

е гладка крива върху двумерната сфера  $S^2(1)$ . Разглеждаме 2-мерна повърхнина  $\mathcal{M}'_m$ , лежаща върху ротационната хиперповърхнина  $\mathcal{M}'$  и зададена по следния начин:

$$\mathcal{M}'_m : z(u, v) = Z(u, w^1(v), w^2(v)), \quad u \in I, v \in J.$$

Параметризацията на  $\mathcal{M}'_m$  може да се запише също във вида:

$$\mathcal{M}'_m : z(u, v) = f(u) l(v) + g(u) e_4, \quad u \in I, v \in J. \quad (2.40)$$

$\mathcal{M}'_m$  е 1-параметрична система от меридиани на  $\mathcal{M}'$ . Ще наричаме  $\mathcal{M}'_m$  времениподобна

меридианна повърхнина от елиптичен тип.

**Забележка 2.2.1.** Меридианни повърхнини от хиперболически тип могат да се конструират като се използва ротационна хиперповърхнина в  $\mathbb{R}_1^4$  с пространственоподобна ос и 2-мерна хиперболическа сфера в 3-мерно пространство на Минковски. Могат да се конструират и меридианни повърхнини от параболически тип, които лежат върху ротационна хиперповърхнина със светлинноподобна ос [40].

Ще покажем, че времениподобните меридианни повърхнини от елиптичен тип удовлетворяват условието  $\kappa^2 - k < 0$ , поради което те нямат главни линии и не допускат параметризация спрямо главни линии. Ще въведем изотропни параметри и ще намерим геометричен репер и геометричните функции спрямо изотропните параметри.

Без ограничение на общността считаме, че кривата  $c : l = l(v)$  върху двумерната сфера  $S^2(1)$  е параметризирана спрямо естествен параметър, т.е. за  $l(v)$  е в сила:

$$\langle l(v), l(v) \rangle = 1, \quad \langle l'(v), l'(v) \rangle = 1.$$

Ще използваме формулите на Френе за крива върху сферата  $S^2(1)$ , които са:

$$\begin{aligned} l' &= t; \\ t' &= \kappa n - l; \\ n' &= -\kappa t, \end{aligned}$$

където  $\kappa = \kappa(v)$  е сферичната кривина, зададена с  $\kappa(v) = \langle t'(v), n(v) \rangle$ , а  $\{l(v), t(v), n(v)\}$  е ортонормиран репер в  $\mathbb{R}^3 = \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$ .

За удобство, при диференциране по параметъра  $u$  използваме означението  $\dot{f}(u) = \frac{\partial f}{\partial u}$ , а при диференциране по параметъра  $v$  използваме означението  $\kappa'(v) = \frac{\partial \kappa}{\partial v}$ .

Без ограничение на общността можем да считаме, че  $\dot{f}(u)^2 - \dot{g}(u)^2 = -1$ , откъдето следва че  $\dot{f}\ddot{f} - \dot{g}\ddot{g} = 0$ . За кривината  $\kappa_m$  на меридианната крива  $m$  имаме  $\kappa_m = \dot{f}\ddot{g} - \dot{g}\ddot{f}$ . Допирателните векторни полета  $z_u$  и  $z_v$  на повърхнината  $\mathcal{M}'_m$  имат вида:

$$\begin{aligned} z_u &= \dot{f}(u)l(v) + \dot{g}(u)e_4; \\ z_v &= f(u)t(v). \end{aligned}$$

Пресмятаме коефициентите на първата основна форма:

$$\begin{aligned} E &= \langle z_u, z_u \rangle = \dot{f}(u)^2 - \dot{g}(u)^2 = -1; \\ F &= \langle z_u, z_v \rangle = 0; \\ G &= \langle z_v, z_v \rangle = f^2(u). \end{aligned}$$

Тъй като  $E = -1 < 0$ ,  $F = 0$ ,  $G = f^2(u) > 0$ , то повърхнината  $\mathcal{M}'_m$  е времениподобна. Имаме  $EG - F^2 = -f^2(u)$ . Разглеждаме следната ортонормирана база на допирателното пространство:

$$\begin{aligned} x &= z_u; \\ y &= \frac{z_v}{f} = t. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Следователно,  $\langle x, x \rangle = -1$ ,  $\langle x, y \rangle = 0$ ,  $\langle y, y \rangle = 1$ . Разглеждаме ортонормирана база на нормалното пространство, зададена с:

$$\begin{aligned} n_1 &= n(v); \\ n_2 &= \dot{g}(u)l(v) + \dot{f}(u)e_4. \end{aligned} \tag{2.42}$$

За нея имаме:  $\langle n_1, n_1 \rangle = 1$ ,  $\langle n_1, n_2 \rangle = 0$ ,  $\langle n_2, n_2 \rangle = 1$ .

Пресмятаме вторите производни на векторната функция  $z(u, v)$ :

$$\begin{aligned} z_{uu} &= \ddot{f}l + \ddot{g}e_4; \\ z_{uv} &= \dot{f}l'(v) = \dot{f}t; \\ z_{vv} &= ft' = f\kappa n - fl, \end{aligned} \tag{2.43}$$

откъдето намираме коефициентите на матрицата  $\mathcal{C}$ :

$$\begin{aligned} c_{11}^1 &= \langle z_{uu}, n_1 \rangle = 0; \\ c_{11}^2 &= \langle z_{uu}, n_2 \rangle = -\kappa_m; \\ c_{12}^1 &= \langle z_{uv}, n_1 \rangle = 0; \\ c_{12}^2 &= \langle z_{uv}, n_2 \rangle = 0; \\ c_{22}^1 &= \langle z_{vv}, n_1 \rangle = f\kappa; \\ c_{22}^2 &= \langle z_{vv}, n_2 \rangle = -f\dot{g}. \end{aligned}$$

Следователно, матрицата  $\mathcal{C} = (c_{ij}^k)$  има вида:

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_m \\ 0 & 0 \\ f\kappa & -f\dot{g} \end{pmatrix}$$

и за функциите  $\Delta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  получаваме

$$\Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = \kappa_m f \kappa, \quad \Delta_3 = 0,$$

откъдето намираме коефициентите на втората основна форма:

$$L = 0, \quad M = \kappa_m \kappa, \quad N = 0.$$

Следователно, инвариантите  $k$  и  $\varkappa$ , определени от изображението на Вайнгартен  $\gamma$ , имат следния вид:

$$k = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{\kappa_m^2 \kappa^2}{f^2},$$

$$\varkappa = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)} = 0.$$

От това, че  $\varkappa = 0$ , можем да формулираме следното твърдение:

**Твърдение 2.2.2.** *Времениподобната меридианна повърхнина  $\mathcal{M}'_m$  от елиптичен тип, дефинирана чрез (2.40), е повърхнина с плоска нормална свързаност.*

Можем да разграничим следните три основни случая на меридианни повърхнини от елиптичен тип:

**I.**  $\kappa(v) = 0$ , т.е. сферичната крива  $s$  върху сферата  $S^2(1)$  е голяма окръжност. В този случай, векторното поле  $n_1$  е постоянно, понеже  $\tilde{\nabla}_x n_1 = \tilde{\nabla}_y n_1 = 0$ , и повърхнината  $\mathcal{M}'_m$  лежи в хиперравнината  $\mathbb{R}_1^3 = \{x, y, n_2\}$  на  $\mathbb{R}_1^4$ .

**II.**  $\kappa_m = 0$ , т.е. меридианната крива  $m$  е част от права. В този случай  $k = \varkappa = 0$ . Може да се пресметне, че и Гаусовата кривина е  $K = 0$ , откъдето следва, че  $\mathcal{M}'_m$  е развиваема праволинейна повърхнина.

**III.**  $\kappa \kappa_m \neq 0$ , т.е. кривата  $s$ , лежаща върху сферата  $S^2(1)$ , не е голяма окръжност и меридианната крива  $m$  не е права линия.

В първите два случая повърхнината  $\mathcal{M}'_m$  се състои само от инфлексни точки. По нататък ще разглеждаме общия (третия) случай, т.е. считаме, че е изпълнено  $\kappa \neq 0$  и  $\kappa_m \neq 0$ .

Пресмятаме:

$$\kappa^2 - k = -\frac{\kappa_m^2 \kappa^2}{f^2}. \quad (2.44)$$

От (2.44) следва, че за времениподобните меридианни повърхнини от елиптичен тип е в сила неравенството  $\kappa^2 - k < 0$ , откъдето получаваме, че изображението на Вайнгартен  $\gamma$  е недиагонализируемо, т.е. не съществуват главни линии за повърхнината  $\mathcal{M}'_m$ . Затова, ще въведем изотропни параметри за този клас повърхнини.

Разглеждаме следната смяна на параметризацията:

$$\begin{cases} \bar{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{f(u)} du + \frac{v}{\sqrt{2}} \\ \bar{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{f(u)} du - \frac{v}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Следователно,

$$\begin{aligned} \bar{u}_u &= \frac{1}{\sqrt{2}f}; & \bar{u}_v &= \frac{1}{\sqrt{2}}; \\ \bar{v}_u &= \frac{1}{\sqrt{2}f}; & \bar{v}_v &= -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Тогава, за производните  $z_{\bar{u}}, z_{\bar{v}}$  спрямо новите параметри  $\bar{u}, \bar{v}$  получаваме:

$$\begin{aligned} z_{\bar{u}} &= \frac{f}{\sqrt{2}} z_u + \frac{1}{\sqrt{2}} z_v; \\ z_{\bar{v}} &= \frac{f}{\sqrt{2}} z_u - \frac{1}{\sqrt{2}} z_v. \end{aligned}$$

Коефициентите на първата основна форма спрямо новите параметри имат вида:

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \langle z_{\bar{u}}, z_{\bar{u}} \rangle = 0; \\ \bar{F} &= \langle z_{\bar{u}}, z_{\bar{v}} \rangle = -f^2(\bar{u}, \bar{v}); \\ \bar{G} &= \langle z_{\bar{v}}, z_{\bar{v}} \rangle = 0, \end{aligned}$$

т.е. параметрите  $(\bar{u}, \bar{v})$  са изотропни параметри на повърхнината. Ще въведем геометричния репер на повърхнината спрямо изотропните параметри и ще намерим геометричните функции на повърхнината спрямо тях.

Първо пресмятаме деривационните формули за репера  $\{x, y, n_1, n_2\}$  спрямо па-



раметрите  $(u, v)$ . От  $x = z_u$ ,  $y = \frac{z_v}{f}$  и формули (2.43) получаваме:

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_x x &= \ddot{f}l + \ddot{g}e_4; & \tilde{\nabla}_x n_1 &= 0; \\ \tilde{\nabla}_x y &= 0; & \tilde{\nabla}_y n_1 &= -\frac{\kappa}{f}t; \\ \tilde{\nabla}_y x &= \frac{\dot{f}}{f}t; & \tilde{\nabla}_x n_2 &= \ddot{g}l + \ddot{f}e_4; \\ \tilde{\nabla}_y y &= \frac{\kappa}{f}n - \frac{1}{f}l; & \tilde{\nabla}_y n_2 &= \frac{\dot{g}}{f}t.\end{aligned}$$

Като използваме (2.41) и (2.42), от горните формули намираме:

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_x x &= -\kappa_m n_2; & \tilde{\nabla}_x n_1 &= 0; \\ \tilde{\nabla}_x y &= 0; & \tilde{\nabla}_y n_1 &= -\frac{\kappa}{f}y; \\ \tilde{\nabla}_y x &= \frac{\dot{f}}{f}y; & \tilde{\nabla}_x n_2 &= -\kappa_m x; \\ \tilde{\nabla}_y y &= \frac{\dot{f}}{f}x + \frac{\kappa}{f}n_1 - \frac{\dot{g}}{f}n_2; & \tilde{\nabla}_y n_2 &= \frac{\dot{g}}{f}y.\end{aligned}\tag{2.45}$$

Равенствата (2.45) са деривационните формули на повърхнината спрямо параметрите  $(u, v)$ .

Да разгледаме следната изотропна база на допирателното пространство:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{z_{\bar{u}}}{f} = \frac{x+y}{\sqrt{2}}; \\ \bar{y} &= \frac{z_{\bar{v}}}{f} = \frac{x-y}{\sqrt{2}}.\end{aligned}\tag{2.46}$$

Очевидно, налице са равенствата:  $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = 0$ ,  $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = -1$ ,  $\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle = 0$ . Като използваме деривационните формули (2.45) спрямо параметрите  $(u, v)$  и (2.46), след пресмятане

получаваме следните формули спрямо изотропните параметри  $(\bar{u}, \bar{v})$ :

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{\bar{x}}\bar{x} &= \frac{\dot{f}}{\sqrt{2}f}\bar{x} + \frac{\kappa}{2f}n_1 - \frac{1 + \dot{f}^2 - f\ddot{f}}{2f\sqrt{\dot{f}^2 + 1}}n_2; \\ \tilde{\nabla}_{\bar{x}}\bar{y} &= -\frac{\dot{f}}{\sqrt{2}f}\bar{y} - \frac{\kappa}{2f}n_1 + \frac{1 + \dot{f}^2 + f\ddot{f}}{2f\sqrt{\dot{f}^2 + 1}}n_2; \\ \tilde{\nabla}_{\bar{y}}\bar{x} &= -\frac{\dot{f}}{\sqrt{2}f}\bar{x} - \frac{\kappa}{2f}n_1 + \frac{1 + \dot{f}^2 + f\ddot{f}}{2f\sqrt{\dot{f}^2 + 1}}n_2; \\ \tilde{\nabla}_{\bar{y}}\bar{y} &= \frac{\dot{f}}{\sqrt{2}f}\bar{y} + \frac{\kappa}{2f}n_1 - \frac{1 + \dot{f}^2 - f\ddot{f}}{2f\sqrt{\dot{f}^2 + 1}}n_2;\end{aligned}\tag{2.47}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{\bar{x}}n_1 &= -\frac{\kappa}{2f}\bar{x} + \frac{\kappa}{2f}\bar{y}; \\ \tilde{\nabla}_{\bar{y}}n_1 &= \frac{\kappa}{2f}\bar{x} - \frac{\kappa}{2f}\bar{y}; \\ \tilde{\nabla}_{\bar{x}}n_2 &= \frac{1 + \dot{f}^2 + f\ddot{f}}{2f\sqrt{\dot{f}^2 + 1}}\bar{x} - \frac{1 + \dot{f}^2 - f\ddot{f}}{2f\sqrt{\dot{f}^2 + 1}}\bar{y}; \\ \tilde{\nabla}_{\bar{y}}n_2 &= -\frac{1 + \dot{f}^2 - f\ddot{f}}{2f\sqrt{\dot{f}^2 + 1}}\bar{x} + \frac{1 + \dot{f}^2 + f\ddot{f}}{2f\sqrt{\dot{f}^2 + 1}}\bar{y}.\end{aligned}\tag{2.48}$$

**Забележка 2.2.3.** В горните формули (2.47) и (2.48) векторните полета  $n_1$  и  $n_2$  не са от геометричния репер на повърхнината, освен в случая  $1 + \dot{f}^2 + f\ddot{f} = 0$ .

Ще пресметнем векторното поле на средната кривина  $H$  на повърхнината  $\mathcal{M}'_m$ . Като използваме, че  $\{\bar{x}, \bar{y}\}$  е изотропна база на допирателното пространство и спрямо изотропна база  $H = -\sigma(\bar{x}, \bar{y})$ , от формули (2.47) получаваме:

$$H = \frac{\kappa}{2f}n_1 - \frac{1 + \dot{f}^2 + f\ddot{f}}{2f\sqrt{\dot{f}^2 + 1}}n_2.$$

В случая, когато  $1 + \dot{f}^2 + f\ddot{f} = 0$ , векторното поле на средната кривина има вида  $H = \frac{\kappa}{2f}n_1$ , откъдето следва, че геометричният репер за повърхнината  $\mathcal{M}'_m$  е  $\{\bar{x}, \bar{y}, n_1, n_2\}$ . Решенията на диференциалното уравнение  $1 + \dot{f}^2 + f\ddot{f} = 0$  се задават със следната формула:

$$f(u) = \pm\sqrt{-u^2 + 2au + b}, \quad a = \text{const}, b = \text{const}.$$

Като използваме, че  $\dot{g} = \sqrt{\dot{f}^2 + 1}$ , получаваме:

$$\dot{g} = \pm \frac{\sqrt{a^2 + b}}{\sqrt{-u^2 + 2au + b}},$$

откъдето след интегриране намираме:

$$g(u) = \pm \sqrt{a^2 + b} \arcsin \frac{u - a}{\sqrt{a^2 + b}} + c_1, \quad c_1 = \text{const.}$$

И така, в този случай получихме, че меридианна крива  $m$  на времениподобната меридианна повърхнина  $\mathcal{M}'_m$  се задава с функциите

$$\begin{aligned} f(u) &= \pm \sqrt{-u^2 + 2au + b}; \\ g(u) &= \pm \sqrt{a^2 + b} \arcsin \frac{u - a}{\sqrt{a^2 + b}} + c_1; \end{aligned}$$

където  $a = \text{const}$ ,  $b = \text{const}$ ,  $c_1 = \text{const}$ . За тази меридианна повърхнина геометричният репер е  $\{\bar{x}, \bar{y}, n_1, n_2\}$ . В този случай, от формули (2.47) и (2.48) при  $f(u) = \pm \sqrt{-u^2 + 2au + b}$  се получават следните геометрични функции на повърхнината:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= -\gamma_2 = -\frac{\dot{f}}{\sqrt{2}f} = \frac{u - a}{\sqrt{2}(-u^2 + 2au + b)}; \\ \nu &= \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\kappa}{2f} = \frac{\pm \kappa}{2\sqrt{-u^2 + 2au + b}}; \\ \mu_1 &= \mu_2 = -\frac{\sqrt{\dot{f}^2 + 1}}{f} = \frac{-\sqrt{a^2 + b}}{-u^2 + 2au + b}; \\ \beta_1 &= \beta_2 = 0. \end{aligned}$$

В общия случай, когато  $1 + \dot{f}^2 + f\ddot{f} \neq 0$ , за векторното поле на средната кривина  $H$  имаме

$$\langle H, H \rangle = \frac{\kappa^2(\dot{f}^2 + 1) + (1 + \dot{f}^2 + f\ddot{f})^2}{4f^2(\dot{f}^2 + 1)}.$$

Разглеждаме нормалните векторни полета  $\bar{n}_1$  и  $\bar{n}_2$ , дефинирани чрез:

$$\begin{aligned} \bar{n}_1 &= \frac{\kappa\sqrt{\dot{f}^2 + 1}}{\sqrt{\kappa^2(\dot{f}^2 + 1) + (1 + \dot{f}^2 + f\ddot{f})^2}} n_1 - \frac{1 + \dot{f}^2 + f\ddot{f}}{\sqrt{\kappa^2(\dot{f}^2 + 1) + (1 + \dot{f}^2 + f\ddot{f})^2}} n_2, \\ \bar{n}_2 &= \frac{1 + \dot{f}^2 + f\ddot{f}}{\sqrt{\kappa^2(\dot{f}^2 + 1) + (1 + \dot{f}^2 + f\ddot{f})^2}} n_1 + \frac{\kappa\sqrt{\dot{f}^2 + 1}}{\sqrt{\kappa^2(\dot{f}^2 + 1) + (1 + \dot{f}^2 + f\ddot{f})^2}} n_2. \end{aligned}$$

Очевидно, реперът  $\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{n}_1, \bar{n}_2\}$  е геометричният репер на повърхнината  $\mathcal{M}'_m$ . Векторът на средната кривина има дължина:

$$\nu = \|H\| = \sqrt{\langle H, H \rangle} = \frac{\sqrt{\kappa^2(\dot{f}^2 + 1) + (1 + \dot{f}^2 + f\ddot{f})^2}}{2f\sqrt{\dot{f}^2 + 1}}. \quad (2.49)$$

За намирането на останалите геометрични функции на повърхнината използваме равенствата:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \langle \tilde{\nabla}_{\bar{x}} \bar{x}, \bar{n}_1 \rangle; & \mu_1 &= \langle \tilde{\nabla}_{\bar{x}} \bar{x}, \bar{n}_2 \rangle; & \beta_1 &= \langle \tilde{\nabla}_{\bar{x}} \bar{n}_1, \bar{n}_2 \rangle; \\ \lambda_2 &= \langle \tilde{\nabla}_{\bar{y}} \bar{y}, \bar{n}_1 \rangle; & \mu_2 &= \langle \tilde{\nabla}_{\bar{y}} \bar{y}, \bar{n}_2 \rangle; & \beta_2 &= \langle \tilde{\nabla}_{\bar{y}} \bar{n}_1, \bar{n}_2 \rangle. \end{aligned}$$

След пресмятане получаваме:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= -\gamma_2 = -\frac{\dot{f}}{\sqrt{2f}}; \\ \nu &= \frac{\sqrt{\kappa^2(\dot{f}^2 + 1) + (1 + \dot{f}^2 + f\ddot{f})^2}}{2f\sqrt{\dot{f}^2 + 1}}; \\ \mu_1 &= \mu_2 = \frac{\kappa\ddot{f}}{\sqrt{\kappa^2(\dot{f}^2 + 1) + (1 + \dot{f}^2 + f\ddot{f})^2}}; \\ \lambda_1 &= \lambda_2 = \frac{\kappa^2(\dot{f}^2 + 1) + (1 + \dot{f}^2)^2 - f^2\ddot{f}^2}{2f\sqrt{\dot{f}^2 + 1}\sqrt{\kappa^2(\dot{f}^2 + 1) + (1 + \dot{f}^2 + f\ddot{f})^2}}; \\ \beta_1 &= \frac{\kappa\left(\dot{f}\ddot{f}(f\ddot{f} - 2\dot{f}^2 - 2) - f\ddot{f}(\dot{f}^2 + 1)\right) + \kappa'(\dot{f}^2 + 1)(1 + \dot{f}^2 + f\ddot{f})}{\sqrt{2}\sqrt{\dot{f}^2 + 1}\left(\kappa^2(\dot{f}^2 + 1) + (1 + \dot{f}^2 + f\ddot{f})^2\right)}; \\ \beta_2 &= \frac{\kappa\left(\dot{f}\ddot{f}(f\ddot{f} - 2\dot{f}^2 - 2) - f\ddot{f}(\dot{f}^2 + 1)\right) - \kappa'(\dot{f}^2 + 1)(1 + \dot{f}^2 + f\ddot{f})}{\sqrt{2}\sqrt{\dot{f}^2 + 1}\left(\kappa^2(\dot{f}^2 + 1) + (1 + \dot{f}^2 + f\ddot{f})^2\right)}. \end{aligned}$$

### 2.2.2 Времениподобни меридианни повърхнини от елиптичен тип с постоянна Гаусова кривина

В този параграф ще опишем всички времениподобни меридианни повърхнини от елиптичен тип в  $\mathbb{R}_1^4$  с постоянна Гаусова кривина.

Нека  $\mathcal{M}'_m$  е времениподобна меридианна повърхнина, дефинирана с (2.40). От формули (2.47), лесно се пресмята, че Гаусовата кривина на повърхнината зависи

само от функцията  $f$  на меридианната крива  $m$  и се задава с формулата:

$$K = \frac{\ddot{f}(u)}{f(u)}. \quad (2.50)$$

От формула (2.50) директно следва верността на следното твърдение.

**Теорема 2.2.4.** *Нека  $\mathcal{M}'_m$  е времениподобна меридианна повърхнина от елиптичен тип, дефинирана чрез (2.40). Тогава,  $\mathcal{M}'_m$  е плоска повърхнина тогава и само тогава, когато меридианната крива  $m$  се задава с функциите:*

$$\begin{aligned} f(u) &= a u + b; \quad a = \text{const}, b = \text{const}; \\ g(u) &= \pm \sqrt{a^2 + 1} u + c_1; \quad c_1 = \text{const}. \end{aligned}$$

Чрез следващото твърдение описваме класа на времениподобните меридианни повърхнини от елиптичен тип, които имат постоянна ненулева Гаусова кривина.

**Теорема 2.2.5.** *Нека  $\mathcal{M}'_m$  е времениподобна меридианна повърхнина от елиптичен тип, дефинирана чрез (2.40). Тогава,  $\mathcal{M}'_m$  има постоянна ненулева Гаусова кривина  $K$  тогава и само тогава, когато меридианната крива  $m$  се задава чрез:*

$$\begin{aligned} f(u) &= a_1 \cos \sqrt{-K} u + a_2 \sin \sqrt{-K} u, \quad \text{при } K < 0; \\ f(u) &= a_1 \cosh \sqrt{K} u + a_2 \sinh \sqrt{K} u, \quad \text{при } K > 0, \end{aligned}$$

където  $a_1$  и  $a_2$  са константи, а функцията  $g(u)$  се определя от  $\dot{g}(u) = \sqrt{\dot{f}^2(u) + 1}$ .

*Доказателство.* Като използваме (2.50), получаваме, че Гаусовата кривина  $K$  е константа, тогава и само тогава, когато функцията  $f$  удовлетворява следното диференциално уравнение:

$$\ddot{f} - K f = 0.$$

Общото решение на горното уравнение се дава с формулите:

$$\begin{aligned} f(u) &= a_1 \cos \sqrt{-K} u + a_2 \sin \sqrt{-K} u, \quad \text{при } K < 0; \\ f(u) &= a_1 \cosh \sqrt{K} u + a_2 \sinh \sqrt{K} u, \quad \text{при } K > 0, \end{aligned}$$

където  $a_1$  и  $a_2$  са константи. Функцията  $g(u)$  се определя от  $\dot{g} = \sqrt{\dot{f}^2 + 1}$ . □

### 2.2.3 Времениподобни меридианни повърхнини от елиптичен тип с постоянна средна кривина

В този параграф ще дадем класификацията на времениподобните меридианни повърхнини от елиптичен тип в  $\mathbb{R}_1^4$  с постоянна средна кривина.

**Теорема 2.2.6.** *Нека  $\mathcal{M}'_m$  е времениподобна меридианна повърхнина от елиптичен тип, дефинирана с (2.40). Тогава,  $\mathcal{M}'_m$  има постоянна средна кривина, т.е.  $\|H\| = a = \text{const}$ ,  $a \neq 0$ , тогава и само тогава, когато кривата с върху  $S^2(1)$  има постоянна сферична кривина  $\kappa = \text{const} = b$ ,  $b \neq 0$  и меридианната крива  $m$  се задава, чрез  $\dot{f} = \varphi(f)$ , където*

$$\varphi(t) = \pm \sqrt{\frac{1}{t^2} \left( C \pm \frac{t}{2} \sqrt{4a^2 t^2 - b^2} \mp \frac{b^2}{4a} \ln |2at + \sqrt{4a^2 t^2 - b^2}| \right)^2 - 1}, \quad C = \text{const},$$

а функцията  $g(u)$  е дефинирана чрез  $\dot{g} = \sqrt{\dot{f}^2 + 1}$ .

*Доказателство.* Векторното поле на средната кривина  $H$  има дължина, която се задава с формула (2.49), откъдето следва, че  $\|H\| = \text{const} = a$  тогава и само тогава, когато е в сила равенството:

$$\kappa^2 = \frac{4a^2 f^2 (\dot{f}^2 + 1) - (1 + \dot{f}^2 + f\ddot{f})^2}{\dot{f}^2 + 1}.$$

Като се има предвид, че лявата страна на горното равенство е функция на параметъра  $v$ , а дясната страна е функция на  $u$ , получаваме

$$\begin{aligned} \kappa &= \text{const} = b, \quad b \neq 0; \\ 4a^2 f^2 (\dot{f}^2 + 1) - (1 + \dot{f}^2 + f\ddot{f})^2 &= b^2 (\dot{f}^2 + 1). \end{aligned} \tag{2.51}$$

Първото равенство на (2.51) показва, че сферичната крива  $c$  има постоянна сферична кривина  $\kappa = b$ , т.е.  $c$  е окръжност върху  $S^2(1)$ . От второто равенство на (2.51) получаваме следното диференциално уравнение:

$$(1 + \dot{f}^2 + f\ddot{f})^2 = (\dot{f}^2 + 1)(4a^2 f^2 - b^2). \tag{2.52}$$

Нека  $\dot{f} = \varphi(f)$  и тогава от (2.52) получаваме, че функцията  $\varphi = \varphi(t)$  е решение на следното диференциално уравнение:

$$1 + \varphi^2 + \frac{t}{2}(\varphi^2)' = \pm \sqrt{\varphi^2 + 1} \sqrt{4a^2 t^2 - b^2}.$$

Общото решение на горното уравнение се дава с формулата:

$$\varphi(t) = \pm \sqrt{\frac{1}{t^2} \left( C \pm \frac{t}{2} \sqrt{4a^2t^2 - b^2} \mp \frac{b^2}{4a} \ln |2at + \sqrt{4a^2t^2 - b^2}| \right)^2 - 1}, \quad (2.53)$$

където  $C = \text{const}$ . Функцията  $f$  е определена от  $\dot{f} = \varphi(f)$  и (2.53), а функцията  $g$  е определена от  $\dot{g} = \sqrt{\dot{f}^2 + 1}$ .  $\square$

#### 2.2.4 Времениподобни меридианни повърхнини от елиптичен тип с постоянна инварианта $k$

Нека  $\mathcal{M}'_m$  е времениподобна меридианна повърхнина от елиптичен тип. За инвариантата  $k$ , определена от изображението на Вайнгартен  $\gamma$ , имаме следната формула

$$k = \frac{\kappa_m^2 \kappa^2}{f^2}, \quad (2.54)$$

където  $\kappa_m$  се изразява чрез функцията  $f$  по формулата:  $\kappa_m = -\frac{\ddot{f}}{\sqrt{\dot{f}^2 + 1}}$ .

В следващата теорема описваме класа от времениподобните меридианни повърхнини от елиптичен тип с постоянна инварианта  $k$ .

**Теорема 2.2.7.** *Нека  $\mathcal{M}'_m$  е времениподобна меридианна повърхнина от елиптичен тип, дефинирана с (2.40). Тогава,  $\mathcal{M}'_m$  е с постоянна инварианта  $k = \text{const} = a^2$ ,  $a \neq 0$  тогава и само тогава, когато кривата с върху  $S^2(1)$  има постоянна сферична кривина  $\kappa = \text{const} = b$ ,  $b \neq 0$  и меридианната крива  $m$  е определена чрез  $\dot{f} = \varphi(f)$ , където*

$$\varphi(t) = \pm \sqrt{\left( \frac{at^2}{2b} + C \right)^2 - 1}, \quad C = \text{const},$$

а функцията  $g$  е определена чрез  $\dot{g} = \sqrt{\dot{f}^2 + 1}$ .

*Доказателство.* От (2.54) следва, че  $k = \text{const} = a^2$ ,  $a \neq 0$  тогава и само тогава, когато

$$\kappa^2 = \frac{a^2 f^2 (\dot{f}^2 + 1)}{\ddot{f}^2}.$$

От последното равенство, като имаме предвид, че лявата страна е функция на параметъра  $v$ , а дясната страна е функция на  $u$ , получаваме:

$$\kappa = \text{const} = b, \quad b \neq 0;$$

$$a^2 f^2 (\dot{f}^2 + 1) = b^2 \ddot{f}^2.$$

Следователно, кривата  $c$  има постоянна сферична кривина  $\kappa = b$ , а функцията  $f$  е решение на следното диференциално уравнение:

$$b^2 \ddot{f}^2 - a^2 f^2 (\dot{f}^2 + 1) = 0. \quad (2.55)$$

Полагаме  $\dot{f} = \varphi(f)$  в уравнението (2.55) и получаваме, че функцията  $\varphi = \varphi(t)$  е решение на:

$$\frac{b}{2}(\varphi^2)' = \pm at \sqrt{\varphi^2 + 1}.$$

Общото решение на горното уравнение се дава с формулата:

$$\varphi(t) = \pm \sqrt{\left(\frac{at^2}{2b} + C\right)^2 - 1}, \quad C = \text{const}. \quad (2.56)$$

Функцията  $f$  е определена от  $\dot{f} = \varphi(f)$  и (2.56), а функцията  $g$  е определена от  $\dot{g} = \sqrt{\dot{f}^2 + 1}$ .  $\square$

По аналогичен начин могат да се разгледат и други класове времениподобни меридианни повърхнини от елиптичен тип: например, с паралелно векторно поле на средната кривина, с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина и др. Те се описват чрез решаване на съответни диференциални уравнения за функцията  $f(u)$ , определяща меридианната крива.

Могат да се разгледат и времениподобни меридианни повърхнини, лежащи върху ротационна хиперповърхнина с пространственоподобна ос или със светлинноподобна ос. За конструирането на меридианни повърхнини, лежащи върху ротационна хиперповърхнина с пространственоподобна ос трябва да се използва 2-мерна хиперболична сфера в 3-мерно пространство на Минковски. За конструиране на меридианни повърхнини, лежащи върху ротационна хиперповърхнина със светлинноподобна ос се използва 2-мерен параболоид, лежащ в светлинноподобна хиперравнина на  $\mathbb{R}_1^4$ .

Предвиждаме тези и други отворени въпроси да бъдат разгледани в нашата бъдеща работа.





# Библиография

- [1] Aleksieva Y., Turgay N.-C., Milousheva V., *General rotational surfaces in pseudo-Euclidean 4-space with neutral metric*. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society **41**, no. 4 (2018), 1773–1793.
- [2] Alías L., Palmer B., *Curvature properties of zero mean curvature surfaces in four-dimensional Lorentzian space forms*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **124** (1998), 315–327.
- [3] Bektas B., Dursun U., *Timelike rotational surfaces of elliptic, hyperbolic and parabolic types in Minkowski space  $\mathbb{E}_1^4$  with pointwise 1-type Gauss map*. Filomat 29:3 (2015), 381–392.
- [4] Brander D., *Singularities of spacelike constant mean curvature surfaces in Lorentz-Minkowski space*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **150** (2011), 527–556.
- [5] Burstin C., Mayer W., *Über affine Geometrie XLI: Die Geometrie zweifach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten  $F_2$  im affinen  $R_4$* . Math. Z. **26** (1927), 373–407.
- [6] Chaves R., Cândido, C., *The Gauss map of spacelike rotational surfaces with constant mean curvature in the Lorentz-Minkowski space*. Differential geometry, Valencia, 2001, 106–114, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2002.
- [7] Chen B.-Y., *Geometry of submanifolds*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1973.
- [8] Chen B.-Y., *Surfaces with parallel normalized mean curvature vector*. Monatshefte für Mathematik **90**, no. 3 (1980), 185–194.
- [9] Chen B.-Y., *Classification of marginally trapped Lorentzian flat surfaces in  $\mathbb{E}_2^4$  and its application to biharmonic surfaces*. J. Math. Anal. Appl. **340** (2008), no. 2, 861–875.
- [10] Chen B.-Y., *Classification of marginally trapped surfaces of constant curvature in Lorentzian complex plane*. Hokkaido Math. J., **38** (2009), no. 2, 361–408.
- [11] Chen B.-Y., *Black holes, marginally trapped surfaces and quasi-minimal surfaces*. Tamkang J. Math. **40** (2009), no. 4, 313–341.

- [12] Chen B.-Y., *Classification of spatial surfaces with parallel mean curvature vector in pseudo-Euclidean spaces with arbitrary codimension*. J. Math. Phys. **50** (2009), 043503.
- [13] Chen B.-Y., *Complete classification of spatial surfaces with parallel mean curvature vector in arbitrary non-flat pseudo-Riemannian space forms*. Cent. Eur. J. Math. **7** (2009), 400–428.
- [14] Chen B.-Y., *Complete classification of parallel Lorentz surfaces in neutral pseudo hyperbolic 4-space*. Cent. Eur. J. Math. **8** (2010), no. 4, 706–734.
- [15] Chen B.-Y., *Complete classification of parallel Lorentz surfaces in four-dimensional neutral pseudosphere*. J. Math. Phys. **51** (2010), no. 8, 083518, 22 pp.
- [16] Chen B.-Y., *Complete explicit classification of parallel Lorentz surfaces in arbitrary pseudo-Euclidean spaces*. J. Geom. Phys. **60** (2010), no. 10, 1333–1351.
- [17] Chen B.-Y., *Complete classification of Lorentz surfaces with parallel mean curvature vector in arbitrary pseudo-Euclidean space*. Kyushu J. Math. **64** (2010), no. 2, 261–279.
- [18] Chen B.-Y., *Submanifolds with parallel mean curvature vector in Riemannian and indefinite space forms*. Arab J. Math. Sci. **16** (2010), no. 1, 1–46.
- [19] Chen B.-Y., *Pseudo-Riemannian geometry,  $\delta$ -invariants and applications*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2011.
- [20] Chen B.-Y., *Classification of minimal Lorentz surfaces in indefinite space forms with arbitrary codimension and arbitrary index*. Publ. Math. Debrecen **78** (2011), 485–503.
- [21] Chen B.-Y., Dillen F., Van der Veken J., *Complete classification of parallel Lorentzian surfaces in Lorentzian complex space norms*. Internat. J. Math. **21** (2010), no. 5, 665–686.
- [22] Chen B.-Y., Garay O., *Classification of quasi-minimal surfaces with parallel mean curvature vector in pseudo-Euclidean 4-space  $\mathbb{E}_2^4$* . Result. Math. **55** (2009), no. 1-2, 23–38.
- [23] Chen B.-Y., Van der Veken J., *Complete classification of parallel surfaces in 4-dimensional Lorentzian space forms*. Tohoku Math. J. **61** (2009), no. 1, 1–40.
- [24] Chen B.-Y., Van der Veken J., *Marginally trapped surfaces in Lorentzian space with positive relative nullity*, Class. Quantum Grav. **24**, 551–563 (2007).

- [25] Chen B.-Y., Van der Veken J., *Spacial and Lorenzian surfaces in Robertson-Walker space-times*, J. Math. Phys. **48**, 073509, 12 pp, (2007).
- [26] Chen B.-Y., Van der Veken J., *Classification of marginally trapped surfaces with parallel mean curvature vector in Lorenzian space forms*, Houston J. Math. **36**, 421–449 (2010).
- [27] Chen B.-Y., Yang, D., *Addendum to "Classification of marginally trapped Lorentzian flat surfaces in  $\mathbb{E}_2^4$  and its application to biharmonic surfaces"*. J. Math. Anal. Appl., **361** (2010), no. 1, 280–282.
- [28] Cole F. N., *On rotations in space of four dimensions*. American Journal of Mathematics, **12**, no. 2 (1890), 191–210.
- [29] Dursun U., *On spacelike rotational surfaces with pointwise 1-type Gauss map*. Bulletin of the Korean Mathematical Society **52**, no. 1 (2015), 301–312.
- [30] Eisenhart L., *Minimal surfaces in Euclidean four-space*. Amer. J. Math. **34** (1912), 215–236.
- [31] Fu Y., Hou Z.-H., *Classification of Lorentzian surfaces with parallel mean curvature vector in pseudo-Euclidean spaces*. J. Math. Anal. Appl. **371** (2010), no. 1, 25–40.
- [32] Ganchev G., Milousheva V., *On the theory of surfaces in the four-dimensional Euclidean space*, Kodai Math. J. **31** (2008), 183–198.
- [33] Ganchev G., Milousheva V., *Invariants and Bonnet-type theorem for surfaces in  $\mathbb{R}^4$* . Cent. Eur. J. Math. **8** (2010), no. 6, 993–1008.
- [34] Ganchev G., Milousheva V., *Chen rotational surfaces of hyperbolic or elliptic type in the four-dimensional Minkowski space*. Comptes Rendus de L'Academie Bulgare des Sciences **64** (2011), 641–652.
- [35] Ganchev G., Milousheva V., *An invariant theory of spacelike surfaces in the four-dimensional Minkowski space*. Mediterranean Journal of Mathematics **9** (2012), 267–294.
- [36] Ganchev G., Milousheva V., *Timelike surfaces with zero mean curvature in Minkowski 4-space*. Israel J. Math. **196** (2013), 413–433.
- [37] Ganchev G., Milousheva V., *An invariant theory of marginally trapped surfaces in the four-dimensional Minkowski space*, J. Math. Phys. **53**, 033705 (2012), DOI: 10.1063/1.3693976.

- [38] Ganchev G., Milousheva V., *Special classes of meridian surfaces in the four-dimensional Euclidean space*, Bull. Korean Math. Soc. **52**, no. 6 (2015), 2035–2045.
- [39] Ganchev G., Milousheva V., *Meridian surfaces of elliptic or hyperbolic type in the four-dimensional Minkowski space*, Math. Commun., **21**, no. 1 (2016), 1–21.
- [40] G. Ganchev, V. Milousheva, *Meridian surfaces of parabolic type in the four-dimensional Minkowski space*, In: Geometry, Integrability and Quantization, I. Mladenov, G. Meng and A. Yoshioka (Eds), Avangard Prima, 2016, 243–255, DOI:10.7546/giq-17-2016-243-255.
- [41] Ganchev G., Milousheva V., *Surfaces with parallel normalized mean curvature vector field in Euclidean or Minkowski 4-space*, Filomat **33**, no. 4 (2019), 1135–1145.
- [42] Ganchev G., Milousheva V., *Quasi-minimal rotational surfaces in pseudo-Euclidean four-dimensional space*. Cent. Eur. J. Math. **12** (2014), no. 10, 1586–1601.
- [43] Ganchev G., Milousheva V., *General rotational surfaces in the four-dimensional Minkowski space*. Turkish Journal of Mathematics **38**, no. 5 (2014), 883–895.
- [44] Haesen S., Ortega M., *Boost invariant marginally trapped surfaces in Minkowski 4-space*. Classical and Quantum Gravity **24** (2007), 5441–5452,
- [45] Haesen S., Ortega M., *Marginally trapped surfaces in Minkowski 4-space invariant under a rotational subgroup of the Lorentz group*. General Relativity and Gravitation **41** (2009), 1819–1834.
- [46] Haesen S., Ortega M., *Screw invariant marginally trapped surfaces in Minkowski 4-space*. J. Math. Anal. Appl. **355** (2009), 639–648.
- [47] Lagrange J. L. *Essai d’une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies*. Miscellanea Taurinensia 2, 325 (1760), no. 1, 173–199.
- [48] Lane E., *Projective differential geometry of curves and surfaces*. University of Chicago Press, Chicago, 1932.
- [49] Larsen J. C., *Complex analysis, maximal immersions and metric singularities*, Monatshefte für Mathematik **122** (1996), 105–156.
- [50] Little J., *On singularities of submanifolds of higher dimensional Euclidean spaces*. Annali di Matematica Pura ed Applicata, IV Ser 83 (1969), 261–335.
- [51] Liu H., Liu G., *Hyperbolic rotation surfaces of constant mean curvature in 3-de Sitter space*. Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin **7** (2000), 455–466.

- [52] Liu H., Liu G., *Weingarten rotation surfaces in 3-dimensional de Sitter space*. Journal of Geometry **79** (2004), 156–168.
- [53] López R., *Timelike surfaces with constant mean curvature in Lorentz three-space*. Tohoku Math. J. **52** (2000), 515–532.
- [54] Milousheva V., *General rotational surfaces in  $\mathbb{R}^4$  with meridians lying in two-dimensional planes*. Comptes Rendus de L'Academie Bulgare des Sciences **63** (2010), 339–348.
- [55] Meusnier, J. B., *Mémoire sur la courbure des surfaces*. Mém. Mathém. Phys. Acad. Sci. Paris, prés. par div. Savans **10** (1785), 477–510. Presented in 1776.
- [56] Moore C., *Surfaces of rotation in a space of four dimensions*. Annals of Mathematics **21** (1919), 81–93.
- [57] Moore C., *Rotation surfaces of constant curvature in space of four dimensions*. Bulletin of the American Mathematical Society **26** (1920), 454–460.
- [58] Nitsche J. C. C., *Lectures on Minimal Surfaces*. Volume 1. Cambridge University Press, New York, 1989.
- [59] O'Neill M., *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press, London, 1983.
- [60] Penrose R. *Gravitational collapse and space-time singularities*, Phys. Rev. Lett., **14**, 57–59 (1965).
- [61] Rosca R., *On null hypersurfaces of a Lorentzian manifold*. Tensor (N.S.) **23** (1972), 66–74.
- [62] Sakaki M., *Lorentz stationary surfaces in 4-dimensional space forms of index 2*. Tsukuba J. Math. **35** (2011), no. 2, 215–229.
- [63] Sasahara N., *Spacelike helicoidal surfaces with constant mean curvature in Minkowski 3-space*. Tokyo J. Math. **23** (2000), no. 2, 477–502.
- [64] Shu S., *Space-like submanifolds with parallel normalized mean curvature vector field in de Sitter space*. J. Math. Phys. Anal. Geom. **7** (2011), no. 4, 352–369.
- [65] Tribuzy R., Guadalupe I., *Minimal immersions of surfaces into 4-dimensional space forms*. Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova **73** (1985), 1–13.

- 
- [66] Walter R., *Über zweidimensionale parabolische Flächen im vierdimensionalen affinen Raum. I: Allgemeine Flächentheorie*. J. Reine Angew. Math. **227** (1967), 178–208.
- [67] Yau S., *Submanifolds with constant mean curvature*. Amer. J. Math. **96** (1974), 346–366.

# Съдържание

<b>1</b>	<b>Фундаментални теореми за времеподобни повърхнини в четиримерно пространство на Минковски</b>	<b>11</b>
1.1	Основни сведения и понятия . . . . .	11
1.2	Изображение на Вайнгартен за времеподобна повърхнина в $\mathbb{R}_1^4$ . . . . .	14
1.3	Времеподобни повърхнини, състоящи се от омбилични точки . . . . .	26
1.4	Времеподобни повърхнини без омбилични точки . . . . .	28
1.4.1	Времеподобни повърхнини, параметризирани спрямо главни линии . . . . .	29
1.4.2	Времеподобни повърхнини, параметризирани спрямо изотропни линии . . . . .	39
1.4.3	Фундаментални теореми за времеподобни повърхнини от общ тип	43
1.5	Времеподобни повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина . . . . .	52
1.5.1	Повърхнини, удовлетворяващи $K - H^2 \neq 0$ . . . . .	53
1.5.2	Повърхнини, удовлетворяващи $K - H^2 = 0$ . . . . .	58
1.5.3	Фундаментални теореми за времеподобни повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина . . . . .	60
<b>2</b>	<b>Времеподобни повърхнини от ротационен тип</b>	<b>65</b>
2.1	Времеподобни обобщени ротационни повърхнини в $\mathbb{R}_1^4$ . . . . .	65
2.1.1	Обобщени ротационни повърхнини от първи тип . . . . .	67
2.1.2	Обобщени ротационни повърхнини от втори тип . . . . .	72
2.1.3	Плоски времеподобни обобщени ротационни повърхнини . . . . .	77
2.1.4	Времеподобни обобщени ротационни повърхнини с плоска нормална свързаност . . . . .	79
2.1.5	Времеподобни обобщени ротационни повърхнини, състоящи се от параболични точки . . . . .	80
2.1.6	Минимални времеподобни обобщени ротационни повърхнини . . . . .	82
2.1.7	Времеподобни обобщени ротационни повърхнини с постоянно векторно поле на средната кривина . . . . .	87



2.1.8	Времениподобни обобщени ротационни повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина . . . .	88
2.2	Времениподобни меридианни повърхнини в $\mathbb{R}_1^4$ . . . . .	90
2.2.1	Меридианни повърхнини, лежащи върху ротационна хиперпо- върхнина с времениподобна ос . . . . .	91
2.2.2	Времениподобни меридианни повърхнини от елиптически тип с посто- янна Гаусова кривина . . . . .	99
2.2.3	Времениподобни меридианни повърхнини от елиптически тип с посто- янна средна кривина . . . . .	101
2.2.4	Времениподобни меридианни повърхнини от елиптически тип с посто- янна инварианта $k$ . . . . .	102